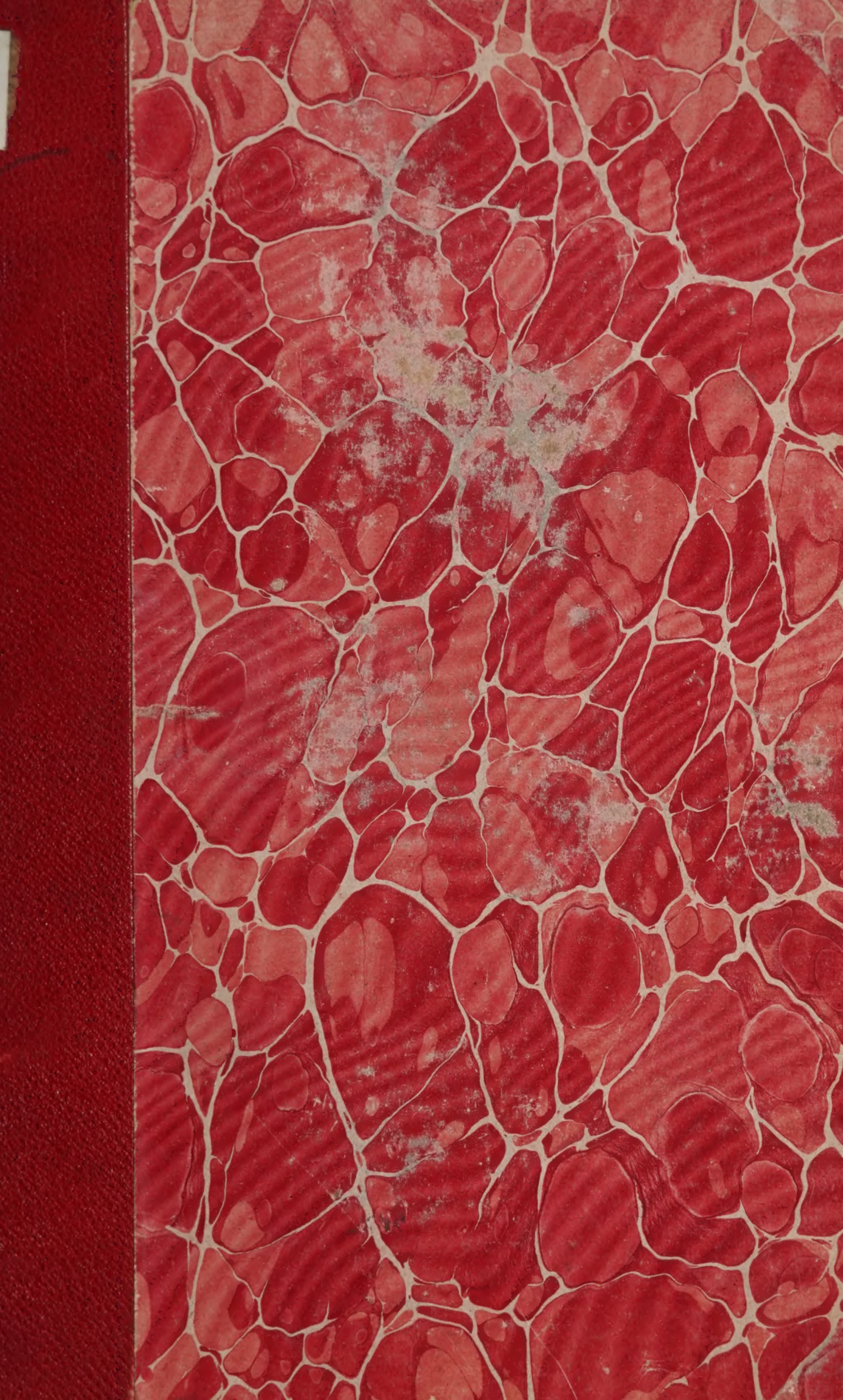
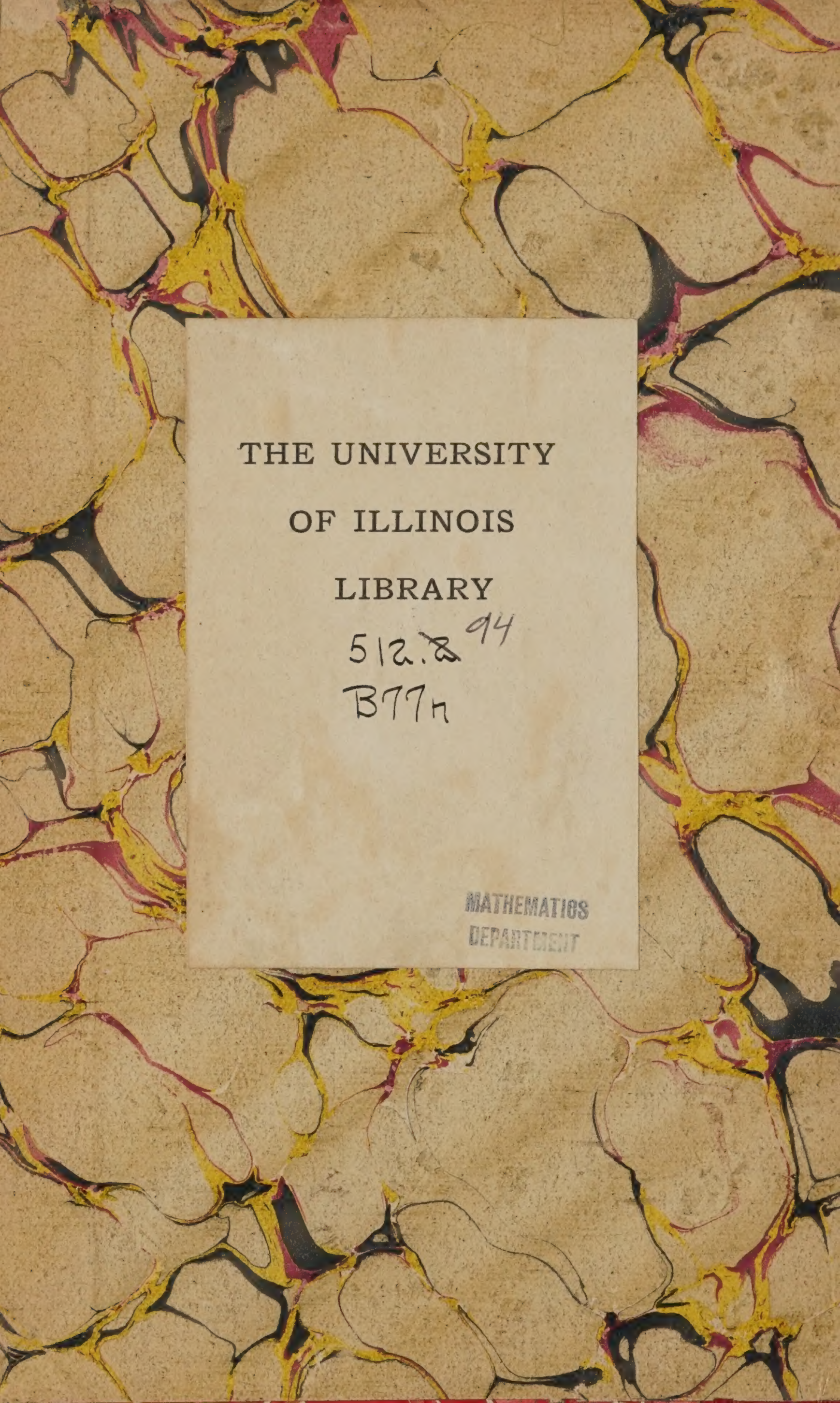
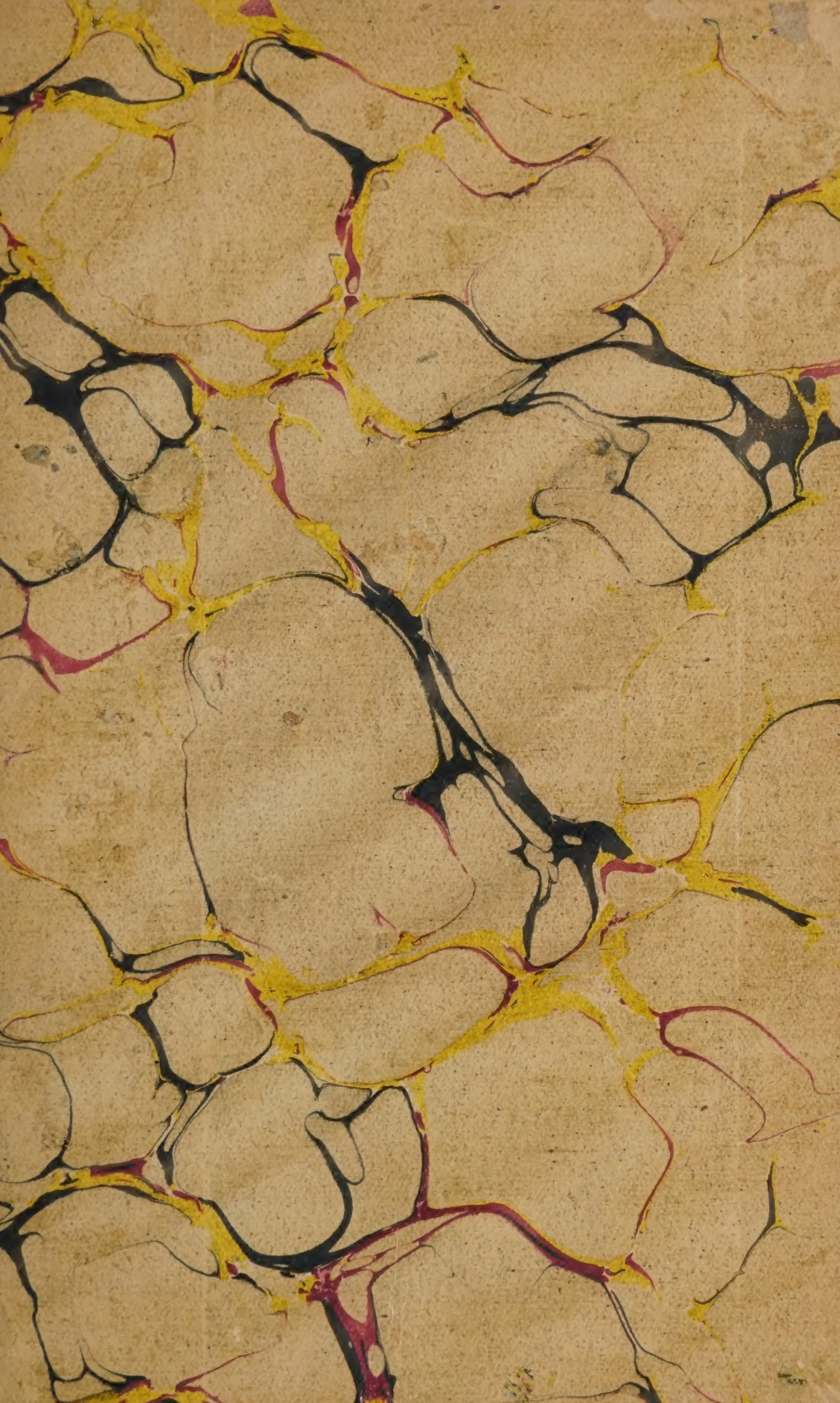



THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
512.894
B77n
MATHEMATICS
DEPARTMENT



NOUVELLE MÉTHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS.

IMPRIMERIE DE OUTHENIN CHALANDRE FILS.

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS

NUMÉRIQUES

DE TOUS LES DEGRÉS,

PAR J. BRIZARD,

DOCTEUR EN MÉDECINE.



A PARIS,

CHEZ BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

A BESANÇON,

CHEZ BINTOT, LIBRAIRE, PLACE SAINT-PIERRE. | CHEZ CYP. MONNOT, LIB. GRAND'RUE, N° 64.

1834.

512.94
B77n
Math

AVANT-PROPOS.

Dès l'origine de l'algèbre jusqu'à nos jours, les analystes les plus célèbres se sont successivement occupés de la résolution des équations numériques. L'importance attachée à la solution de ce problème est assez attestée par les travaux des Descartes, des Newton, des Bernouilli, des Fontaine, des Euler, des Lagrange, etc, etc. Quoique ces immortels auteurs aient élevé des monumens à la gloire des Sciences et de l'esprit humain, les méthodes qu'ils ont données se sont trouvées, ou inexactes, ou incomplètes, ou rebutantes à cause de la longueur ou de la difficulté du calcul.

C'est Viète qui, le premier, a cherché à résoudre immédiatement les équations numériques d'un degré quelconque, par une suite d'opérations purement arithmétiques et analogues à celles qu'on emploie pour l'extraction des racines des nombres. Harriot, Ougtred, Wallis, Pell et d'autres se sont efforcés de faciliter la pratique de cette méthode qui est toujours restée très défectueuse, et que l'on a fini par abandonner entièrement avant la fin du 17ᵉ siècle.

A la méthode de Viète ont succédé celle de Newton et celle de Daniel Bernouilli, qui a été développée par Euler. On ne peut les considérer que comme des procédés d'approximation, quelquefois incertains et seulement utiles pour les équations numériques qui sont déjà à peu près résolues.

En 1790, Rolle de l'académie des Sciences publia sa méthode des *Cascades*, que la longueur des calculs et l'incertitude qui naît des imaginaires, ont fait abandonner depuis long-temps.

En 1747, le célèbre Fontaine donna une nouvelle méthode. *Je la donne*, disait-il, *pour l'analyse en entier*,

que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'algèbre. Cette méthode suppose qu'en substituant pour l'inconnue, dans l'équation proposée, les nombres consécutifs, 1, 2, 3, etc., on parvient toujours à deux résultats de signes différens : ce qui n'a lieu qu'autant qu'il n'y a pas de racines comprises en nombre pair entre deux nombres entiers consécutifs. D'après cette considération, il est facile de trouver des exemples où la méthode de Fontaine est en défaut. On conçoit que ce défaut devait également avoir lieu dans toute méthode, où l'on emploierait des substitutions pour déterminer les limites des racines réelles et inégales.

Pour corriger cette méthode, Lagrange imagina un procédé publié en 1767 dans les mémoires de l'académie de Berlin. Il consiste à substituer pour l'inconnue, dans l'équation proposée, les quantités o, D, 2 D, 3 D, etc., dont la différence D soit moindre que la différence qui existe entre les deux racines les plus voisines. Ce procédé s'est trouvé exact; mais pour se procurer D, il fallait calculer l'équation qui, ayant pour racines les différences entre les racines de la proposée, s'élève au degré $\frac{m(m-1)}{2}$; ce qui rendait le travail effrayant, pour peu que le degré de l'équation fût élevé.

Afin de remédier à cet inconvénient, l'illustre auteur donna en 1795 et 1798, comme produits d'une longue méditation, deux autres procédés pour trouver le nombre D; et malgré ces simplifications, la méthode des substitutions pouvait donner lieu à des milliers, même à un nombre indéfiniment plus grand, d'opérations superflues. On doit encore à Lagrange une bonne méthode d'approximation, que la longueur des calculs rend inutile pour la pratique.

En 1807, M. Budan publia une nouvelle méthode qu'il dédia à l'empereur des Français. Elle est, à mon avis, plus

simple et plus expéditive que toutes celles qui l'ont précédée. Comme elle est venue d'elle-même prendre place dans celle que nous présentons, on la trouvera au chap. 6, sous le nom de *Méthode des transformées proprement dite*. Malgré ses avantages, cette méthode n'est pas sans inconvéniens graves. Elle renferme un procédé d'approximation qui n'est guère moins laborieux que celui de Lagrange ; et pour passer d'une transformée en $x - p$ à celle en $x - p - 1$, le calcul devient long et fastidieux, lorsque les nombres à ajouter ou à soustraire sont considérables, surtout quand l'équation est d'un degré un peu élevé. Si cette équation, par exemple, est du 8e degré, il faut prendre les sommes 1res, 2es, 3es, 4es, 5es, 6es, 7es, 8es.

Dans notre *Méthode*, pour passer d'une suite en $x - p$ à celle en $x - p - 1$, il suffit de prendre les sommes premières, quel que soit le degré de l'équation. Nous commençons par enseigner la formation des suites premières, et le passage des suites quelconques aux transformées. Après avoir rappelé diverses notions fournies par l'algèbre, nous exposons notre méthode des suites combinée avec celle des transformées. Nous passons à la recherche des racines imaginaires, et à celle des racines réelles, comprises en nombre pair entre deux nombres entiers consécutifs. Nous donnons ensuite une nouvelle méthode d'approximation que l'on peut rendre encore plus rapide, en procédant en même temps, ce qu'a fait Newton, à l'approximation et à la vérification. On trouve, dans le dernier chapitre, 1° un petit tableau triangulaire qui suffit pour la formation de la suite 1re d'une équation d'un degré quelconque ; 2° la méthode des suites proprement dite ; 3° celle des transformées proprement dite ; 4° un nouveau procédé pour extraire, à l'aide des suites et des transformées, les racines quelconques des nombres ; 5° un tableau plus facile que celui qui vient d'être énoncé.

La résolution des équations, selon Lagrange, peut être considérée comme le *point capital de toute l'analyse.* Aussi la solution de ce problème est-elle le but principal, et presque le seul, que se sont toujours proposé tous les auteurs d'algèbre.

Une méthode facile, vraiment usuelle, doit être précieuse pour l'application de l'algèbre aux besoins des arts et de la société. « Lorsqu'on a envisagé, dit Rolle l'académi- » cien, toutes les conditions qui sont nécessaires pour le » succès d'une entreprise, on pourrait souvent s'aider de » l'algèbre pour y réussir ou pour en connaître l'impossi- » bilité; mais on aime mieux chercher d'autres condi- » tions, ou tenter l'exécution par différens moyens, que » d'avoir recours à cette science, et en cela, on a eu quel- » que raison : car, si l'on veut se servir de l'algèbre dans » l'invention d'une machine, ou pour quelqu'autre re- » cherche, en n'employant d'ailleurs que les expériences » des physiciens et les principes des géomètres, on arrivera » à des égalités (*équations*) irrationnelles d'un degré fort » élevé, et il est plus difficile d'éviter ces égalités dans cette » application, que d'éviter les fractions quand on pratique » l'arpentage. Cependant les règles qu'on a données jus- » qu'ici pour résoudre ces égalités, ne sont ni scientifiques ni » générales, et il suffit de les éprouver pour en être rebuté. »

Des raisons particulières nous ont empêché d'émettre nos vues sur la détermination des racines imaginaires, considérées d'une manière générale.

Notre méthode n'est pas sans succès pour l'interpolation, avantage précieux qui lui est tout spécial. Nous la présentons aux commençans, parce qu'elle est facile, sûre et très expéditive. Considérée comme moyen de calcul, elle fournira des secours, nous osons l'espérer, à ceux-là mêmes qui pourraient aimer à faire usage d'une autre méthode quelconque.

NOUVELLE METHODE

POUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS

NUMÉRIQUES

DE TOUS LES DEGRÉS.

CHAPITRE PREMIER.

Formation des suites, et passage des suites aux transformées.

I. Au moyen des coefficiens et du terme connu d'une équation donnée x^m, trouver $m+1$ nombres formant une suite qui, par des additions faciles, soit directement transformée en une suite seconde, puis en une suite 3[e], etc., de manière que le dernier terme de chaque suite, à commencer par la première, soit le résultat que l'on obtiendrait en supposant dans la proposée $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=n$; n étant un nombre entier ou décimal.

Et réciproquement, ces $m+1$ termes étant connus, trouver l'équation qui les a produits.

La solution de ce double problème s'accompagne de modifications relatives au degré de l'équation.

EQUATIONS DU 2[e] DEGRÉ.

II. Lorsque $m=2$, l'équation est du second degré, et la suite a trois termes. Le premier s'obtient en multipliant par 2 le premier coefficient; le second est la somme des deux coefficiens de l'équation proposée; le troisième se compose de cette somme et du terme connu.

Exemple.

Supposition.	$x^2 - 7x + 12 = 0.$
$x = 1$ ou $x - 1 = 0.$	$2 \quad -6 \quad +6.$

Sur la droite de $x = 1$, ou $x - 1 = 0$, on a la suite première dont le premier terme est 2, le second, -6; le troisième, $+6$.

Autre exemple.

Supposition.	$x^2 - 9x + 20 = 0.$
$x = 1$ ou $x - 1 = 0.$	$2 \quad -8 \quad +12.$

Dans ce second exemple, le premier terme de la suite première est 2; le second est -8, qui est la somme des coefficiens $+1 - 9$; le troisième est $+12$, que l'on a obtenu en ajoutant -8 à $+20$.

Dorénavant les suppositions de $x = 1$, $x = 2$, etc. seront représentées par $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, etc., ou seulement par $x - 1$, $x - 2$, etc.

ÉQUATIONS DU 3e DEGRÉ.

III. Le premier terme de la suite première est le produit du premier coefficient multiplié par 6. Le second terme comprend 6 fois le premier coefficient et 2 fois le second; on se le procure facilement en ajoutant 3 fois le premier coefficient au second, et en multipliant la somme par 2. Le troisième terme de la suite est la somme des trois coefficiens. Le quatrième s'obtient en ajoutant cette somme au terme connu.

Exemple.

	$x^3 - 10x^2 + 33x - 54 = 0.$
$x - 0$	$6 \quad -20.$
$x - 1$, suite première.	$6 \quad -14 \quad +24 \quad -30.$

Autre exemple.

	$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0.$
Suite première ou $x - 1$.	$6 \quad -12 \quad +19 \quad -8.$

Une opération toute mentale est presque toujours suffisante pour se procurer la suite première d'une équation quelconque du troisième degré.

EQUATIONS DU 4e DEGRÉ.

IV. Dans les équations de ce degré, la formation de la suite première est encore fort rapide ; elle s'opère ordinairement à l'inspection des coefficiens.

Le premier terme se compose de 24 fois le premier coefficient. Le second comprend 36 fois le premier coefficient et 6 fois le second : on peut ajouter 6 fois ce premier coefficient au second, et multiplier la somme par 6.

Le troisième terme se forme en prenant 14 fois le premier coefficient, 6 fois le second, 2 fois le troisième : pour se le procurer très-aisément, il n'y a qu'à retrancher le premier terme du second, et ajouter le reste au double de la somme des premier et troisième coefficiens.

Le quatrième terme de la suite est la somme de tous les coefficiens de x.

Le cinquième se compose de cette somme et du terme connu.

Exemple.

	$x - 0.$	$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 12 = 0.$
Suite	en $x - 0.$	$24 - 18 \quad + 12.$
	en $x - 1.$	$24 + 6 \quad - 6 \quad + 7 \quad - 5.$

Autre exemple.

		$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 12.$
Suite	en $x - 0.$	$24 + 42 \quad + 12.$
	en $x - 1.$	$24 + 66 \quad + 54 \quad + 5 \quad - 7.$

Autre exemple.

		$x^4 - 16x^3 + 99x^2 - 228x + 144 = 0.$
Suite	en $x - 0.$	$24 - 84 \quad + 200.$
	en $x - 1.$	$24 - 60 \quad + 116 \quad - 144 \quad 0.$

EQUATIONS DU 5e DEGRÉ.

V. Le premier terme est le produit de 120 multiplié par le premier coefficient.

Le deuxième comprend 240 fois le premier coefficient et 24 fois le second.

Le troisième se forme en prenant 150 fois le premier coefficient, 36 fois le second et 6 fois le troisième.

Le quatrième s'obtient en ajoutant ensemble 30 fois le premier coefficient, 14 fois le second, 6 fois le troisième, 2 fois le quatrième.

Le cinquième est la somme de tous les coefficiens.

Le sixième se compose de cette somme et du terme connu.

On se procure sans peine les deux derniers termes de la suite première, dont le premier terme est 120, lorsque le premier coefficient est l'unité : on peut, dans ce cas, pour avoir le second terme, ajouter 10 au second coefficient et multiplier la somme par 24.

Exemple.

$$x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = 0.$$

Suite	en $x=0$	$120 + 48 - 24 + 8$
	en $x=1$	$120 + 168 + 24 - 16 + 10 + 12.$

VI. La méthode de l'auteur est générale ; elle apprend à former la suite première d'une équation d'un degré quelconque. *Voyez le tableau triangulaire n° 49, et surtout celui n° 62.*

Lorsqu'une équation n'a pas autant de termes plus un qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de x, on remplace par zéro chaque terme qui manque.

VII. Pour passer de la suite première, quelque soit le degré de l'équation, à la suite seconde, de celle-ci à la suite troisième, de celle-ci à la suite quatrième, etc., on prend pour premier terme de la suite cherchée, le premier terme de la suite précédente ; pour second terme, la somme des premier et second termes de la suite précédente ; pour troisième terme, la somme des second et troisième termes de la suite précédente ; et ainsi du reste jusqu'à ce que l'on ait obtenu l'avant-dernier terme ; on ajoute cet avant-dernier terme au dernier de la suite précédente, la somme est le terme qui termine la suite que l'on forme.

Exemple.

$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

$x=1$. Suite 1re	$2 - 10 + 20$
$x=2$. Suite 2e	$2 - 8 + 12$
$x=3$. Suite 3e	$2 - 6 + 6$

Autre exemple.

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 29 = 0.$$

$x-1$. Suite 1re	6	-18	$+30$	$+1$
$x-2$. Suite 2e	6	-12	$+12$	$+13$
$x-3$. Suite 3e	6	-6	0	$+13$

Autre exemple.

$$x^3 \quad 0x^2 - 7x + 7 = 0$$

$x-1$. Suite 1re	6	$+6$	-6	$+1$
$x-2$. Suite 2e	6	$+12$	0	$+1$
$x-3$. Suite 3e	6	$+18$	$+12$	$+13$

Autre exemple.

$$x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 284x - 420 = 0.$$
$$\quad - 36 \quad - 48$$

$x-1$. Suite 1re	24	-12	-84	$+252$	-168
$x-2$. Suite 2e	24	$+12$	-96	$+168$	0
$x-3$. Suite 3e	24	$+36$	-84	$+72$	$+72$

Autre exemple.

$$x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 46x + 203 = 0.$$
$$\quad - 24 \quad - 6$$

$x-1$. Suite 1re	24	0	-30	$+37$	$+240$
$x-2$. Suite 2e	24	$+24$	-30	$+7$	$+247$
$x-3$. Suite 3e	24	$+48$	-6	-23	$+224$
$x-4$. Suite 4e	24	$+72$	$+42$	-29	$+195$

$x-1$, $x-2$, etc., correspondent respectivement à suite première, suite seconde, etc. Il suffira donc à l'avenir, pour désigner les suites, d'écrire $x-1$, $x-2$, etc.

VIII. Pour passer d'une suite donnée à l'équation qui l'a produite, il n'y a qu'à procéder d'une manière précisément opposée à ce qui a été prescrit pour la formation de cette suite. Il faut donc avoir toujours présens à l'esprit les préceptes donnés n° 2, 3, 4, 5 et 6, ou seulement la formation du tableau triangulaire n° 49.

Exemple.

Suite $\quad 6+6-6+1$

Comme cette suite a 4 termes, elle ne peut provenir que d'une équation du troisième degré. Divisez le premier terme

par 6, et le quotient sera le premier coefficient de l'équation que l'on cherche. Si l'on retranche 6 du second terme de la suite proposée et que l'on prenne la moitié du reste, qui est 0, on aura le second coefficient. En ôtant $1+0$, qui sont les deux premiers coefficiens trouvés, de -6, c'est-à-dire du troisième terme de la suite, le reste -7 sera le troisième coefficient. Le terme connu de l'équation s'obtiendra en retranchant -6 de $+1$, quatrième terme de la suite. Ainsi cette suite $6+6-6+1$ provient de l'équation $x^3 \quad 0\,x^2-7x+7$, ou $x^3-7\,x+7=0$.

Lorsqu'on opère sur une suite en $x-1$, on trouve une équation en $x-0$, c'est-à-dire, la proposée. Exécute-t-on cette opération sur une autre suite quelconque, on obtient une transformée de la proposée. La suite en $x-7$ produira la transformée en $x-6$; et généralement au moyen de la suite en $x-p-1$, on se procurera la transformée en $x-p$. *Voyez la formule du binome de Newton n° 61.*

IX. Il est des procédés à l'aide desquels le passage de la suite en $x-p$ à la transformée en $x-p$ est si facile, pour les équations des 4 premiers degrés, qu'il est rare que l'on ne puisse écrire la transformée à la seule inspection de la suite. Voici des exemples pour l'intelligence de ces procédés.

Exemple du 2ᵉ degré.

	$x^2-10x+30=0$.	. . .	$x^2-10x+30$
Suites en $x-1$.	$2-9+21$.	transf. en $x-1$.	$1-8+21$
$x-2$.	$2-7+14$.	. . . $x-2$.	$1-6+14$
$x-3$.	$2-5+9$.	. . . $x-3$.	$1-4+9$
$x-4$.	$2-3+6$.	. . . $x-4$.	$1-2+6$

Si l'on compare ces suites et ces transformées, on reconnaîtra sur-le-champ que pour passer d'une suite du second degré en $x-p$ à la transformée en $x-p$, il suffit de diviser par 2 le premier terme de la suite, et d'ajouter à son second terme le premier coefficient.

Exemple pour le 3ᵉ degré.

	$x^3-2x^2-19x-30=0$.	.	$x^3-2x^2-19x-30$
Suites		transf.	
en $x-1$.	$6+2-20-50$.	en $x-1$.	$1+1-20-50$

Suites					transf.				
en $x-2$.	6 + 8	− 18	− 68.	en $x-2$.	1 + 4	− 15	− 68		
$x-3$.	6 + 14	− 10	− 78.	$x-3$.	1 + 7	− 4	− 78		
$x-4$.	6 + 20	+ 4	− 74.	$x-4$.	1 + 10	+ 13	− 74		
		+ 24							

Il est visible que le premier coefficient de chaque transformée est un; que le second coefficient de la transformée en $x-p$ est la moitié du second terme de la suite en $x-p$; que le troisième coefficient s'obtient, ainsi qu'il a été dit, en retranchant la somme des deux coefficiens trouvés du troisième terme de la suite en $x-p-1$; que le terme connu ne diffère pas du dernier terme de la suite en $x-p$.

On reconnaît encore que les seconds coefficiens forment une progression arithmétique dont la raison est 3 fois le premier coefficient.

Exemple pour le 4e degré.

$$x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 46x + 203 = 0.$$
$$-24 \quad - 6$$

Suites en $x-1$.	24	0	− 30	+ 37	+ 240
$x-2$.	24	+ 24	− 30	+ 7	+ 247
$x-3$.	24	+ 48	− 6	− 23	+ 224
$x-4$.	24	+ 72	+ 42	− 29	+ 195
	x^4	$-6x^3$	$-4x^2$	$+46x$	$+203$
Transf. en $x-1$.	1	− 2	− 16	+ 24	+ 240
$x-2$.	1	+ 2	− 16	− 10	+ 247
$x-3$.	1	+ 6	− 4	− 32	+ 224
$x-4$.	1	+ 10	+ 20	− 18	+ 195

Pour passer, dans cet exemple, de la suite en $x-3$ à la transformée en $x-3$, divisez le premier terme de cette suite par 24; le second par 6, et retranchez du quotient 2 fois le premier coefficient; le troisième par 2, et retranchez du quotient le premier coefficient; vous obtiendrez de cette manière $1+6-4$ qui sont les 3 premiers coefficiens de la transformée en $x-3$. Pour avoir le quatrième coefficient, on retranchera la somme des 3 premiers, qui est $+3$, du quatrième terme de la suite en $x-4$, et comme ce quatrième terme est

— 29, on aura — 32 pour quatrième coefficient; enfin le terme connu + 224 de la suite en $x - 3$ ne diffère pas du dernier terme de la transformée en $x - 3$. Ce raisonnement s'applique au passage de la suite en $x - p$ à la transformée en $x - p$.

Les seconds coefficiens forment une progression arithmétique dont la raison est 4 fois le premier coefficient.

Il est de ces considérations qui s'appliquent aux transformées d'une équation d'un degré quelconque. Et on peut dire en général : 1° que le premier coefficient de toute transformée est le même que le premier coefficient de la proposée ; 2° que les seconds coefficiens des transformées forment une progression arithmétique dont la raison est le produit du plus haut exposant multiplié par le premier coefficient de la proposée ; 3° que le terme connu de la transformée en $x - p$ est le dernier terme de la suite en $x - p$; 4.° que le dernier coefficient d'une transformée quelconque s'obtient en retranchant la somme de tous les coefficiens qui le précèdent de l'avant-dernier terme de la suite suivante.

Il résulte de ces observations que, dans les équations du cinquième degré, on passe facilement de la suite en $x - p$ à la transformée en $x - p$. On sait, en effet, se procurer presque sans peine le premier, le second, le cinquième coefficient, ainsi que le terme connu de la transformée qu'on cherche. Pour avoir le troisième coefficient, il n'y a qu'à diviser par 6 le troisième terme de la suite en $x - p$, et à retrancher du quotient 5 fois le premier coefficient, plus 2 fois le second. Si de la moitié du quatrième terme de la suite en $x - p$, on retranche le second coefficient, le reste sera le quatrième coefficient de la transformée en $x - p$. *Consultez le tableau n° 62.*

X. On peut trouver successivement, à commencer par le dernier, tous les termes de la transformée en $x - 1$ d'une équation d'un degré quelconque. Pour cela, il faut prendre,

1° La somme première des coefficiens et du terme connu de la proposée ;

2° La somme seconde de tous ces coefficiens, sans comprendre le terme connu ;

3° La somme troisième de tous ces coefficiens, excepté le dernier, et ainsi du reste. Le terme sommatoire de chaque suite que l'on aura formée sera un terme de la transformée.

Soit, pour exemple, $x^3 - 2x^2 - 19x - 30 = 0$.

Coefficiens et terme connu donnés.	1	— 2	— 19	— 30
Sommes premières.	1	— 1	— 20	— 50
Sommes secondes.	1	0	— 20	
Sommes troisièmes.	1	+ 1		
Somme quatrième.	1			

On reconnait ici, comme au n.° 9, que les coefficiens et le terme connu de la transformée en $x - 1$ sont $1 + 1 - 20 - 50$.

Autre exemple. $x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 46x + 203 = 0$.

Coefficiens et terme connu donnés.	1	— 6	— 4	+ 46	+ 203
Sommes premières.	1	— 5	— 9	+ 37	+ 240
Sommes secondes.	1	— 4	— 13	+ 24	
Sommes troisièmes.	1	— 3	— 16		
Sommes quatrièmes.	1	— 2			
Somme cinquième.	1				

On trouve encore, comme au troisième exemple du n° 9, pour termes de la transformée en $x - 1$ . . $1 - 2 - 16 + 24 + 240$.

Au moyen du procédé qui vient d'être indiqué, on passe de la transformée en $x - 1$ à celle en $x - 2$; de celle-ci à la transformée en $x - 3$, et ainsi de suite indéfiniment.

Cette manière de se procurer les transformées, quoique facile, devient longue et fastidieuse pour les cinquième, sixième et autres degrés supérieurs. On peut l'abréger pour les équations du troisième degré; mais il n'est pas possible de la rendre aussi expéditive, aussi facile que la méthode des suites modifiée. *Voyez n° 9.*

XI. Lorsqu'on augmente le nombre, soit des suites, soit des transformées, on parvient toujours à avoir une suite ou une transformée dont tous les termes sont affectés du même signe. Cette uniformité de signe annonce la plus grande limite des racines.

XII. Pour passer d'une équation à ses transformés en $x - 10$,

en $x-20$, en $x-30$, etc.; à celles en $x-100$, en $x-200$, en $x-300$, etc., il faut substituer dans la proposée une inconnue x' qui soit, respectivement, dix fois, cent fois, etc., moindre que x. Les coefficiens de cette équation en x' s'obtiennent sans calcul, par le placement convenable de la virgule qui indique les décimales.

On se procure ensuite les transformées en $x'-1$, en $x'-2$, en $x'-3$, etc.; ou ce qui revient au même,

en $\frac{x-10}{10}$, en $\frac{x-20}{10}$, en $\frac{x-30}{10}$, etc; ou bien

en . . . $\frac{x-100}{100}$, en $\frac{x-200}{100}$, en $\frac{x-300}{100}$, etc;

selon que l'on a fait $x'=\frac{x}{10}$, ou $x'=\frac{x}{100}$, etc.

Il ne s'agit plus que de rendre les inconnues de ces transformées, respectivement, dix ou cent fois, etc., aussi grandes; ce qui s'opère par le déplacement convenable de la virgule dans leurs coefficiens.

Soit, par exemple, l'équation $x^3-4x^2+3x-6=0$, dont on demande les transformées en $x-10$, en $x-20$, etc.

On fera $x=10x'$; d'où $x'^3-0,4x'^2+0,03x'-0,006=0$.

On formera les sommes premières, secondes, troisièmes, etc, et l'on obtiendra pour les équations

en x' . . . . $1-0,4+0,03-0,006$

en $\frac{x-10}{10}$ ou $x'-1$ . . . $1+2,6+2,23+0,624$

en $\frac{x-20}{10}$ ou $x'-2$ . . . $1+5,6+10,43+6,454$

etc. etc.

En supprimant la virgule, on aura pour les

équations en $x-10$ . . $1+26+223+624$

. . . en $x-20$ . . $1+56+1043+6454$.

Il est très facile de parvenir aux mêmes résultats en employant les suites.

Soit l'équation . . . $x'^3-0,4x'^2+0,03x'-0,006=0$

Suite en $\frac{x-10}{10}$ ou $x'-1$. $6+5,2+0,63+0,624$

Suite en $\frac{x-20}{10}$ ou $x'-2$. $6+11,2 \quad +5,83+ \quad 6,454$

. . . en $\frac{x-30}{10}$ ou $x'-3$. $6+17,2 \quad +17,03+23,484$.

Si on supprime la virgule, après s'être procuré les transformées en $x'-1$, en $x'-2$, etc., au moyen des suites en $x'-1$, $x'-2$, etc., on aura les transformées en $x-10$, en $x-20$, en $x-30$, etc.

A-t-on besoin d'une suite où l'inconnue est supposée égale à un nombre considérable? de la suite, par exemple, en $x-312$ de l'équation $x^3-4x^2+3x-6=0$? on suppose $x=100x'$; d'où . . . . $x'^3-0,04x'^2+0,0003x'-0,000006=0$.

Suites en $x'-1$. .	6	$+5,92$	$+0,9603$	$+0,960294$
. . . $x'-2$. .	6	$+11,92$	$+6,8803$	$+7,840594$
. . . $x'-3$. .	6	$+17,92$	$+18,8003$	$+26,640894$.

On passe de la suite en $x'-3$ à la transformé en $x'-3$, puis on supprime la virgule dans celle-ci, et l'on a la transformée en $x-300$. . . . . $x'^3+896x'^2+267603x'+2664o894=0$.

Faisant $x-300=10x''$, on obtient la transformée . . . en x''. . . . . . $x''^3+89,6x''^2+2676,03x''+2664o,894=0$

Tr. en $x''-1$. .	1	$+92,6$	$+2858,23$	$+29407,524$
en $x-310$. .	1	$+926$	$+285823$	$+29407524$
S. en $x-311$. .	6	$+1858$	$+286750$	$+29694274$
en $x-312$. .	6	$+1864$	$+288608$	$+29982882$.

On conçoit sans peine que, par une marche analogue, on se procurerait les transformées et les suites en $x-\frac{1}{10}$, $x-\frac{2}{10}$, etc.; celles en $x-\frac{1}{100}$, $x-\frac{2}{100}$, etc.

Si, par exemple, on voulait transformer en $x-0,1$, en $x-0,2$, etc., l'équation $x^4-x^3+x^2-x+1=0$, il faudrait supposer $10x=x'$; former les suites de l'équation $x'^4-10x'^3+100x'^2-1000x'+10000=0$; passer de ces suites aux transformées dont on a besoin; enfin placer convenablement la virgule.

Soit donc. . . . . $x'^4-10x'^3+100x'^2-1000x'+10000$.

$-48 \quad +202$

Suites en $x'-1$ ou $10x-1$. .	$24-$	$24+$	$154-$	$909+$	9091
. . en $x'-2$ ou $10x-2$. .	24	$0+$	$130-$	$755+$	8336
				$-\ 625$	
Tr. en $x'-2$ ou $10x-2$. .	$1-$	$2+$	$64-$	$688+$	8336
. . en $\frac{x'-2}{10}$ ou $\frac{10x-2}{10}$. .	$1-$	$0{,}2+$	$0{,}64-$	$0{,}688+$	$0{,}8336.$

XIII. On se procure une transformée quelconque en $x-p$ en substituant $x'+p$ à x dans la proposée. Ainsi pour avoir la transformée en $x-312$ de l'équation $x^3-4x^2+3x-6=0$, on substituera pour x dans cette équation $x'+312$, et l'on aura

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & (x'+312)^3 = & x'^3 + 936x'^2 + 292032x' + 30371328 \\ -4x^2 = & -4(x'+312)^2 = & \quad - 4x'^2 - 2496x' - 389376 \\ 3x = & 3(x'+312) = & \quad + 3x' + 936 \\ -6 = & -6 = & \quad - 6 \\ \hline \end{array}$$

Transf. en $x-312$ . . $x'^3+932x'^2+289539x'+29982882$.

Il est facile de trouver une transformée quelconque, ou seulement quelques-uns de ses termes, à l'aide des fonctions dérivées de l'équation proposée.

XIV. On sait (n° 10) qu'il suffit de former des sommes pour avoir successivement les diverses transformées d'une équation quelconque. On doit en conclure qu'en procédant d'une manière inverse, c'est-à-dire, en prenant des différences, on passera d'une transformée à celle qui la précède.

Soit, par exemple, la transformée en $x-1$ . . . $x^3+x^2-20x-50$ de l'équation $x^3-2x^2-19x-30=0$; on prendra les différences premières, secondes, etc., entre les coefficiens

coefficiens	$1+1-20-50$
Diff. 1res . .	$1 \quad 0-20-30$
. . 2es . .	$1-1-19$
. . 3es . .	$1-2$
. . 4e . .	$1.$

Les nombres $1, -2, -19, -30$ sont les coefficiens et terme connu de la proposée.

CHAPITRE II.

Quelques notions fournies par l'algèbre concernant les équations.

XV. On appelle racine toute valeur a qui mise peur x rend nuls tous les termes d'un membre d'une équation.

Les racines d'une équation peuvent être de trois sortes: positives, négatives, imaginaires ou impossibles. On les divise encore en réelles et en imaginaires. Celles-ci se trouvent toujours par couples; et si un couple a une racine représentée par $\pm a + b\sqrt{-1}$, l'autre racine sera $\pm a - b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles.

XVI. Toute équation est ou non divisible par le facteur $x \pm a$ suivant que $\mp a$ est ou n'est pas racine. Celle qui a un couple de racines imaginaires, est divisible par le facteur réel du second degré $x^2 \mp 2ax + a^2 + b^2$.

Toute équation contient autant de racines qu'elle a de degrés.

Généralement une équation du degré m est le produit de m facteurs simples; le nombre des facteurs simples réels est égal à celui des racines réelles de l'équation.

XVII. On peut toujours transposer dans un même membre tous les termes d'une équation, en sorte qu'elle prenne, après la réduction, la forme $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Tx + u = 0$: m étant un nombre entier, et les coefficiens A, B, etc., des nombres connus, positifs, négatifs ou nuls.

XVIII. Toute équation peut être préparée de manière que le premier coefficient soit l'unité, tandis que les autres coefficiens sont des nombres entiers. L'équation ainsi disposée ne peut avoir pour racines réelles que des nombres entiers ou des nombres fractionnaires irrationnels qu'on ne peut, en général, déterminer que par approximation.

C'est sous cette forme qu'il est très avantageux de mettre toutes les équations à résoudre.

XIX. Lorsque le premier coefficient est $+1$, le plus grand coefficient négatif, pris positivement, et augmenté de l'unité, est une limite de la plus grande racine positive.

Le terme tout connu de l'équation étant divisé par la somme de ce terme et du plus grand coefficient de signe contraire, prise sans égard pour les signes, le quotient est plus petit que la plus petite racine positive que l'équation puisse avoir : il en est une limite.

On a divers moyens, qu'il est inutile de rapporter ici, pour obtenir une limite plus rapprochée de la plus grande racine positive.

XX. Lorsque deux nombres, p et q, substitués pour x dans une équation, donnent des résultats de signes contraires, il y a au moins une racine réelle comprise entre p et q.

Dans toute équation qui n'a que des racines imaginaires, on ne peut jamais obtenir que des résultats de même signe.

Il y a un nombre pair ou impair de racines réelles comprises entre p et q, suivant que les résultats qu'on obtient en substituant ces nombres pour x, sont de même signe ou de signe contraire.

Toute équation de degré impair a nécessairement une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.

Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

Dans toute équation de degré pair, les racines réelles (et par conséquent aussi les imaginaires) sont en nombre pair. Si le degré est impair, les racines réelles sont en nombre impair; mais les imaginaires sont encore en nombre pair.

Il suit de ce qui précède que l'existence d'une racine réelle n'est douteuse que dans les équations de degré pair dont le dernier terme est positif.

XXI. Le résultat de la substitution d'un nombre $\pm n$ à la place de x, dans une équation donnée, est égal au dernier

terme, soit de la suite, soit de la transformée en $x \mp n$. Par conséquent $\pm n$ est une racine de la proposée, lorsque le dernier terme de la suite ou de la transformée est égal à zéro. Et généralement la proposée a autant de racines égales à $\pm n$ qu'il y a dans la transformée en $x \mp n$ de termes consécutifs, à commencer par le dernier, qui égalent zéro. Dans cet état de chose, la transformée se trouve abaissée d'autant de degrés qu'il y a de racines égales à $\pm n$.

XXII. Si l'on prend en signe contraire, soit les termes de rang pair, soit ceux de rang impair, les racines négatives deviennent positives et réciproquement. Il s'ensuit que pour se procurer toutes les racines réelles d'une équation, il suffit de savoir trouver les positives.

XXIII. L'algèbre donne le moyen de débarrasser une équation des racines égales qu'elle peut avoir : l'emploi des transformées fait obtenir, sans aucune peine, ces racines; on les découvre aussi très facilement au moyen de la méthode des suites.

XXIV. Une équation ne peut avoir plus de racines réelles positives, qu'il n'y a de variations dans la succession des signes de ses coefficiens; ni plus de racines réelles négatives, qu'il ne s'y trouve de permanences de signes : telle est la fameuse règle de Descartes.

Ainsi dans le cas où toutes les racines de l'équation sont réelles, il y a précisément autant de racines positives que de variations de signe, et autant de racines négatives que de permanences.

XXV. Quand un des coefficiens de l'équation est zéro, et que les coefficiens du terme précédent et du suivant sont de même signe, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.

XXVI. On peut déduire de la règle de Descartes les deux propositions suivantes :

1° Une équation en x, dout toutes les racines sont réelles, a autant de racines comprises entre zéro et p, qu'il y a de permanences de signe dans la transformée en $x-p$, de plus que dans l'équation en x.

2° Une équation de cette espèce ne peut avoir, soit une, soit deux, soit n racines comprises entre o et p, si sa trans formée en $x-p$ n'a pas, respectivement, une, ou deux, ou n permanences de signe, de plus que l'équation en x.

XXVII. Le nombre des variations de signe que l'on obtient en supposant successivement x positif et négatif, dans une équation quelconque, est toujours égale au nombre des racines à déterminer, à moins qu'il n'y ait des coefficiens nuls.

XXVIII. On connaît les racines imaginaires au moyen de l'équation au quarré des différences des racines : le calcul de cette équation est tout-à-fait rebutant, pour peu que soit élevé le degré de la proposée.

XXIX. La démonstration du problème n° 1 paraît trop facile pour que l'on croie devoir s'en occuper. Quant aux propositions qui viennent d'être mentionnées, on les trouve avec leurs démonstrations dans les ouvrages d'algèbre.

CHAPITRE III.

Exposition de la méthode des suites, combinée avec celle des transformées.

XXX. Etant donnée une équation $x^m+px^{m-1}+..+t=o$, on prend les suites en $x-1$, en $x-2$, etc, jusqu'à ce qu'on parvienne à une suite en $x-u$ dont les termes sont tous positifs.

Lorsque le dernier terme, soit d'une suite, soit d'une transformée en $x-p$ est égal à zéro, l'équation en x a une racine égale à p, et si n, termes consécutifs de la transformée, à compter du dernier, sont égaux chacun à zéro, la proposée a n racines, chacune égales à p. Dans cet état de choses, la transformée en $x-p$ se trouve abaissée de n degrés.

Toutes les fois que le dernier terme d'une suite en $x-p$ est zéro, on se procure la transformée en $x-p$; cela, pour

prendre les suites de cette dernière qui se trouve abaissée d'un, de deux, ou même de m degrés.

Lorsque le dernier terme d'une suite en $x-p$ est de signe contraire à celui du dernier terme de la suite en $x-p-1$, la proposée a une ou plusieurs racines en nombre impair dont la valeur est comprise entre p et $p+1$.

Pour se procurer les racines négatives, on change les signes des termes de rang pair ou impair de la proposée.

Si l'on opère ce changement de signes sur la première transformée dont tous les termes sont de même signe, on découvre les racines négatives dans la supposition de x positif et *vice versâ*. Cette transformée, abaissée ou non d'un ou de plusieurs degrés, se reconnaît sans peine à l'aide de la première suite dont tous les termes se trouvent aussi affectés du même signe.

En procédant ainsi, on trouve les racines commensurables et l'équation s'abaisse d'autant de degrés; on découvre s'il y a des racines irrationnelles, comprises en nombre impair entre deux nombres entiers consécutifs : la présence des racines égales n'apporte aucun obstacle au calcul.

Il suit de ce qui précède que l'on découvre toutes les racines de la proposée lorsqu'elle peut se réduire à une équation du second degré; que, dans les cas contraires, il ne reste à trouver que les racines imaginaires, et celles qui, étant réelles, sont comprises au nombre de plusieurs entre les nombres entiers p et $p+1$.

EQUATIONS DU 2e DEGRÉ.

XXXI. Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Suites en	$x-1$ . .	2	-6	$+6$
	$x-2$ . .	2	-4	$+2$
	$x-3$ . .	2	-2	$+0$
	$x-4$ . .	2	0	0.

Les deux racines de cette équation sont $x=3$, $x=4$.

Autre exemple. . . $x^2 + 2x - 24 = 0$.

Suite en	$x-1$	2	$+3$	-21

Suites en	$x - 2$	. . . .	$2 + 5 - 16$
	$x - 3$	. . .	$2 + 7 - 9$
	$x - 4$	. . . .	$2 + 9 \quad 0.$

En changeant le signe du terme de rang pair, on trouve . . . . $x^2 - 2x - 24 = 0.$

Suites en	$x + 1$	. . .	$2 - 1 - 25$
	$x + 2$	. . .	$2 + 1 - 24$
	$x + 3$	. . .	$2 + 3 - 21$
	$x + 4$	. . .	$2 + 5 - 16$
	$x + 5$	. . .	$2 + 7 - 9$
	$x + 6$	. . .	$2 + 9 \quad 0.$

On trouve 4 pour racine positive et -6 pour racine négative.

XXXII. Les racines irrationnelles d'une équation du second degré s'annoncent par des changemens de signes à la ligne des résultats.

Exemple. . . $x^2 + 4x - 23 = 0.$

Suites en	$x - 1$	. .	$2 + 5 - 18$
	$x - 2$	. .	$2 + 7 - 11$
	$x - 3$	. .	$2 + 9 - 2$
	$x - 4$	. .	$2 + 11 + 9.$

Il y a une racine positive entre 3 et 4.

Pour avoir la racine négative, on change le signe du terme de rang pair et l'on a . . $x^2 - 4x - 23 = 0.$

Suites en	$x + 1$	. . .	$2 - 3 - 26$
	$x + 2$	. . .	$2 - 1 - 27$
	$x + 3$	. . .	$2 + 1 - 26$
	$x + 4$	. . .	$2 + 3 - 23$
	$x + 5$	. . .	$2 + 5 - 18$
	$x + 6$	. . .	$2 + 7 - 11$
	$x + 7$	. . .	$2 + 9 - 2$
	$x + 8$	. . .	$2 + 11 + 9.$

La racine négative est comprise entre 7 et 8.

XXXIII. Lorsqu'il n'arrive aucun changement de signes à la ligne des résultats, les deux racines sont ou imaginaires ou réelles et comprises entre deux nombres entiers consécutifs.

Exemple. . . . $x^2 - 4x + 12 = 0$.

Suites en $x - 1$	. . .	$2 \quad -3 \quad +9$
$x - 2$	. .	$2 \quad -1 \quad +8$
$x - 3$	. .	$2 \quad +1 \quad +9$
$x - 4$	. .	$2 \quad +3 \quad +12$.

Dans cet exemple, quelque valeur que l'on substitue pour x, le résultat ne sera jamais négatif ; les deux racines sont imaginaires ; la ligne des résultats se compose de deux suites identiques, convergentes vers un terme commun, qui est la quantité imaginaire (qui se trouve sous le signe radical). La ligne verticale qui correspond à x est aussi formée de deux suites, qui seraient identiques si elles n'étaient affectées de signes contraires. Ces observations s'appliquent à toutes les équations du 2e degré dont les racines sont imaginaires, et la partie réelle un nombre entier.

Lorsque cette partie se compose d'un nombre entier et d'un demi, le terme commun se trouve répété, et il faut en retrancher $1/4$ pour obtenir la partie imaginaire.

Exemple. . . . $x^2 - 3x + 12 = 0$.

Suites en $x - 1$	. .	$2 \quad -2 \quad +10$
$x - 2$	. .	$2 \quad 0 \quad +10$
$x - 3$	. .	$2 \quad +2 \quad +12$.

EQUATIONS DU 3e DEGRÉ.

XXXIV. Soit proposée l'équation . . . . $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$.

Suite en $x - 1$ . . . . $6 \quad +12 \quad -21 \qquad 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad -9$

Transformée en $x - 1$ . . $x^2 + 6x - 16 = 0$.

Suites en $x-2$	. . . .	$2 \quad +7 \quad -9$
$x-3$	. . . .	$2 \quad +9 \quad 0$.

On trouve deux racines positives qui sont $x = 1$, $x = 3$.

Il n'était point nécessaire de passer de la suite en $x - 1$ à la transformée en $x - 1$.

Soit encore $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$.

Suite en $x - 1$ . . $6 \quad +12 \quad -21 \qquad 0$

Suites en	$x-2$ . .	6	+ 18	− 9	− 9
	$x-3$ . .	6	+ 24	+ 9	0
				+ 33	

Transf. en $x-3$ . . . $x^2+12x+20=0$.

La proposée a deux racines positives qui sont $x=1$, $x=3$, ainsi qu'on le savait déjà.

Si dans la transformée en $x-1$, on remplace x par $x-1$, on aura $(x-1)^2+6(x-1)-16=0$, de laquelle on tire $x-1+3=\pm\sqrt{25}$, $x=3$, $x=-7$.

Substituant $x-3$ pour x dans la transformée en $x-3$, on a $(x-3)^2+12(x-3)+20=0$, d'où $x-3+6=\pm\sqrt{36-20}=\pm\sqrt{16}=\pm4$, $x+3=\pm4$, $x=1$, racine déjà trouvée, et $x=-7$.

En changeant les signes des termes de rang pair de la proposée, on écrira . . . $x^3-3x^2-25x-21=0$.

Suites en	$x+1$ . . .	6	0	− 27	− 48
	$x+2$ . . .	6	+ 6	− 27	− 75
	$x+3$ . . .	6	+ 12	− 21	− 96
	$x+4$ . . .	6	+ 18	− 9	− 105
	$x+5$ . . .	6	+ 24	+ 9	− 96
	$x+6$ . . .	6	+ 30	+ 33	− 63
	$x+7$ . . .	6	+ 36	+ 63	0
				+ 99	

Transf. en $x+7$ . . . $x^2+18x+80=0$.

La racine négative est encore une fois -7. Veut-on se procurer les deux autres racines au moyen de la transformée en $x+7$? On se rappellera que les signes des termes de rang pair de la proposée ont été changés une seule fois, et que, par cette raison, il faut changer aussi les signes des termes de rang pair de la transformée en $x+7$, qui deviendra $x^2-18x+80=0$. Après la substitution de $x+7$ pour x, on aura $x+7-9=\pm\sqrt{81-80}=\pm1$, d'où $x=1$, $x=3$.

Autre exemple. . . $x^3 \quad 0x^2-27x+54=0$.

Suites en	$x-1$ . . .	6	+ 6	− 26	+ 28
	$x-2$ . . .	6	+ 12	− 20	+ 8
	$x-3$ . . .	6	+ 18	− 8	0
				+ 10	

Transf. en $x-3$ . . . . $x^3+9x^2\pm 0x \quad 0=0$; elle annonce (n° 21 et 30) deux racines égales chacune à 3.

En divisant les 2 membres par x^2, elle se réduit à . . $x-3$ . . $x+9=0$; et par la substitution de $x-3$ pour x, on a $x-3+9=0$, $x=-6$.

La proposée devient, par le changement des signes de ses termes de rang pair,

$$x^3 \quad 0-27x-54=0.$$

Suites en	$x+1$ . .	6	$+\ 6$	$-\ 26$	-80
	$x+2$ . .	6	$+12$	$-\ 20$	-100
	$x+3$ . .	6	$+18$	$-\ \ 8$	-108
	$x+4$ . .	6	$+24$	$+\ 10$	$-\ 98$
	$x+5$ . .	6	$+30$	$+\ 34$	$-\ 64$
	$x+6$ . .	6	$+36$	$+\ 64$	0
				$+100$	

Transf. du 2ᵉ deg. en $x+6$ . . $x^2+18x+81\ =\ 0$; il faut y changer les signes des termes de rang pair, puis substituer $x+6$ pour x ; et on aura $x+6-9=\pm\sqrt{81-81}$ $=\pm 0$, ou $x=3$, $x=3$ pour les deux racines positives.

Autre exemple. . . $x^3-5x^2+x+7=0$.

Suites en	$x-1$ . . .	6	$-\ 4$	$-\ 3$	$+\ 4$
	$x-2$ . . .	6	$+\ 2$	$-\ 7$	$-\ 3$
	$x-3$ . . .	6	$+\ 8$	$-\ 5$	$-\ 8$
	$x-4$ . . .	6	$+14$	$+\ 3$	$-\ 5$
	$x-5$ . . .	6	$+20$	$+17$	$+12$.

Les deux racines positives, annoncées par deux variations de signe dans la proposée, sont comprises, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 4 et 5.

Après le changement de signes des termes de rang pair de la proposée, on a . . $x^3+5x^2+x-7=0$.

Suite en	$x+1$ . .	6	$+16$	$+\ 7$	0
				$+23$	

Trf. du 2ᵉ deg. en $x+1$ . . $x^2+8x+14=0$; on en tire, à cause du changement de signes, $x+1-4=\pm\sqrt{16-14}$, ou $x=3\pm\sqrt{2}$. Les trois racines de l'équation dont il s'agit, sont donc $x=-1$ et $x=3\pm\sqrt{2}$.

Dans cet exemple, on voit que l'extraction de la racine quarrée de 2 dispense de recourir aux méthodes ordinaires d'approximation, pour avoir les deux racines irrationnelles avec autant de décimales que l'on jugera convenable de s'en procurer.

Autre exemple. $x^3 - 2x^2 - 19x - 30 = 0.$

Suites en	$x-1$ . . .	6	$+2$	-20	-50
	$x-2$ . . .	6	$+8$	-18	-68
	$x-3$ . . .	6	$+14$	-10	-78
	$x-4$ . . .	6	$+20$	$+4$	-74
	$x-5$ . . .	6	$+26$	$+24$	-50
	$x-6$ . . .	6	$+32$	$+50$	0
				$+82$	

Transf. en $x-6$ . . . $x^2 + 16x + 65 = 0.$

Une des racines égale 6. Substituant $x-6$ pour x dans la transformée en $x-6$, on a $(x-6)^2 + 16(x-6) + 65 = 0$; on en déduit $x-6+8 = \pm\sqrt{64-65} = \pm\sqrt{-1}$, ou $x = -2 \pm \sqrt{-1}$.

Autre exemple. . . $x^3 \quad 0 - 8x + 32 = 0.$

Suites en	$x-1$ . .	6	$+6$	-7	$+25$
	$x-2$ . .	6	$+12$	-1	$+24$
	$x-3$ . .	6	$+18$	$+11$	$+35.$

Attendu que tous les termes de la suite en $x-3$ sont affectés du même signe, il n'y a plus de racines positives à espérer; il faut chercher la négative, et pour cela, changer les signes des termes de rang pair de la proposée, puis écrire . . . . $x^3 \quad 0 - 8x - 32 = 0.$

Suites en	$x+1$ . . .	6	$+6$	-7	-39
	$x+2$ . . .	6	$+12$	-1	-40
	$x+3$ . . .	6	$+18$	$+11$	-29
	$x+4$ . . .	6	$+24$	$+29$	0
				$+53$	

Transf. en $x+4$ . . . $x^2 + 12x + 40 = 0$; on en déduit, eu égard au changement de signes, $(x+4)^2 - 12(x+4) + 40 = 0$, $x+4-6 = \pm\sqrt{36-40}$, ou $x = 2 \pm \sqrt{-4}$.

Les trois racines sont $x = -4$, $x = 2 \pm \sqrt{-4}$.

	Autre exemple. . .	$x^3 -$	$3x^2 +$	$7x -$	$21 = 0.$
Suites en	$x - 1$ . . .	6	0	+ 5	− 16
	$x - 2$ . . .	6	+ 6	+ 5	− 11
	$x - 3$ . . .	6	+ 12	+ 11	0
				+ 23	

Transf. en $x - 3$ . . . $x^2 + 6x + 16 = 0$; après la substitution de $x - 3$ à la place de x, on trouve $(x-3)^2 + 6(x-3) + 16 = 0$, $x - 3 + 3 = \pm \sqrt{9 - 16}$, $x = \pm \sqrt{-7}$. Les trois racines sont $x = 3$, $x = \pm \sqrt{-7}$.

XXXV. *Autre exemple.* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Suites en	$x - 1$ . . .	6	− 6	+ 6	0
	$x - 2$ . . .		0	0	0
	$x - 3$ . . .			0	0.

Les trois racines sont $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Dans ce cas, les termes de la suite première, excepté le dernier, qui est zéro, ne diffèrent que par leurs signes qui sont alternativement $+ - + -$, et les trois derniers termes de la suite en $x - 2$ sont égaux chacun à zéro. Généralement une équation du degré m, dont le dernier terme de la suite en $x - p$ est égal à zéro, a autant de racines respectivement égales aux nombres consécutifs p, $p + 1$, $p + 2$, etc., que la suite en $x - p - 1$ a de termes consécutifs, à compter du dernier, égaux chacun à zéro. *Voyez n°* 51.

EQUATIONS DU 4e DEGRÉ.

XXXVI. 1er *exemple.* $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0$.

			+ 6	− 30		
Suites en	$x - 1$ . .	24	+ 30	− 24	+ 39	− 36
	$x - 2$ . .	24	+ 54	+ 6	+ 15	− 21
	$x - 3$ . .	24	+ 78	+ 60	+ 21	0
					+ 81	

Trf. en $x - 3$ . . $x^3 + 11x^2 + 29x + 40 = 0$; en changeant les signes des termes de rang pair, elle devient

	$(x-3)+0$ . .	x^3	$-11x^2$	$+29x$	$-40=0.$
Suites en	$(x-3)+1$ . .	6	-16	$+19$	-21
	id. . $+2$ . .	6	-10	$+3$	-18
	id. . $+3$ . .	6	-4	-7	-25
	id. . $+4$ . .	6	$+2$	-11	-36
	id. . $+5$ . .	6	$+8$	-9	-45
	id. . $+6$ . .	6	$+14$	-1	-46
	id. . $+7$ . .	6	$+20$	$+13$	-33
	id. . $+8$ . .	6	$+26$	$+33$	0
				$+59$	

Transf. en $x-3+8$ . . $x^2+13x+45 = 0.$

On trouve $x-3+8=0$, d'où $x=-5$: on a déjà obtenu $x-3=0$, ou $x=3$. Pour avoir les deux autres racines, on se servira de la transformée en $x-3+8$ dont on devra changer les signes des termes de rang pair, à cause du changement de signes opéré sur la transformée en $x-3$; cela fait, on aura $x+5-\frac{13}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-45}$, ou $x=+\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{11}{4}}$: valeurs que l'on déduit de $(x+5)^2-13(x+5)+45=0$.

Après le changement de signes de ses termes de rang pair, la proposée est . . $x^4+x^3-16x^2-55x-75=0.$

			$+18$	-30		
Suites en $x+1$ . .	24	$+42$	-12	-69	-144
$x+2$ . .	24	$+66$	$+30$	-81	-225
$x+3$ . .	24	$+90$	$+96$	-51	-276
$x+4$ . .	24	$+114$	$+186$	$+45$	-231
$x+5$ . .	24	$+138$	$+300$	$+231$	0
				$+531$	

Trf. en $x+5$ . . $x^3+21x^2+149x+360 = 0.$

On a $x+5=0$, ou $x=-5$. Veut-on trouver les autres racines au moyen de la transformée en $x+5$? on changera les signes de ses termes de rang pair, et on écrira

$x+5$ . . . . . $x^3-21x^2+149x-360=0.$

Suite en $(x+5)-1$ . . 6 -36 $+129$ -231

Suites en $(x+5)-2$ . .	6	-30	$+93$	-138		
id. -3 . .	6	-24	$+63$	-75		
id. -4 . .	6	-18	$+39$	-36		
id. -5 . .	6	-12	$+21$	-15		
id. -6 . .	6	-6	$+9$	-6		
id. -7 . .	6	0	$+3$	-3		
id. -8 . .	6	$+6$	$+3$	0		
			$+9$.			

Une de ces racines est $x+5-8=0$, ou $x=3$; et la transformée en $x+5-8$ . . $x^2+3x+5=0$, fournira les deux autres racines : mais, pour cela, il ne faut pas changer les signes de ses termes de rang pair, parce qu'il y a eu deux changemens de signes; un sur les termes pairs de la proposée, l'autre sur ceux de la transformée en $x+5$. On trouvera en substituant $x+5-8$ ou $x-3$ pour x, $(x-3)^2+3(x-3)+5=0$, de laquelle on tire $x-3+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}-5}$ ou $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{11}{4}}$.

On a dû remarquer jusqu'à présent que les détails sont d'autant plus faciles, que le degré de l'équation est moins élevé.

Autre exemple. . . $x^4 \quad 0x^3 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$

		$+12$	-48		
Suites en $x-1$ . .	24	$+36$	-36	$+36$	0
$x-2$ . .	24	$+60$	0	0	0
$x-3$ . .	24	$+84$	$+60$	0	0
$x-4$ . .	24	$+108$	$+144$	$+60$	$+60$.

On trouve trois racines positives qui sont $x=1$, $x=2$, $x=3$. On devait les connaître (n° 35) à la vue de la suite en $x-1$, ou de celle en $x-2$.

Pour se procurer la racine négative, on peut se servir de l'équation donnée, ou d'une des transformées en $x-1$, en $x-2$, en $x-3$. Celle en $x-1$ est . . . . $x^3+4x^2-19x+14=0$.

Suite en $x-2$ . .	6	$+14$	-14	0
			0	

Transf. en $x-2$ . . $x^2+7x-8=0$; elle devient par la substitution de $x-2$ pour x, $(x-2)^2+7(x-2)-8=0$, d'où $x-2+\frac{7}{2}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}+8}=\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\pm\frac{9}{2}$, $x=2+\frac{2}{2}=3$, $x=2-\frac{16}{2}=-6$.

En supposant x négatif, la proposée deviendra . . . .

	x^4	$0x^3$	$-25x^2$	$-60x$	$-36=0.$
		$+12$	-48		
Suites en $x+1$ . .	24	$+36$	-36	-84	-120
$x+2$ . .	24	$+60$	0	-120	-240
$x+3$ . .	24	$+84$	$+60$	-120	-360
$x+4$ . .	24	$+108$	$+144$	-60	-420
$x+5$ . .	24	$+132$	$+252$	$+84$	-336
$x+6$ . .	24	$+156$	$+384$	$+336$	0.

On a encore une fois $x=-6$, mais par un travail plus long que le précédent. On pourrait se procurer les autres racines au moyen de la transformée en $x+6$.

Autre exemple. . .

	x^4	$0x^3$	$-20x^2$	$-12x$	$+13=0.$
		$+12$	-38		
Suites en $x-1$ . .	24	$+36$	-26	-31	-18
$x-2$ . .	24	$+60$	$+10$	-57	-75
$x-3$ . .	24	$+84$	$+70$	-47	-122
$x-4$ . .	24	$+108$	$+154$	$+23$	-99
$x-5$ . .	24	$+132$	$+262$	$+177$	$+78.$

Les deux changemens de signes à la ligne des résultats annoncent deux racines positives; l'une est comprise entre 0 et 1, l'autre entre 4 et 5.

On changera les signes des termes de rang pair de la proposée, et on découvrira les racines négatives.

	x^4	$0x^3$	$-20x^2$	$+12x$	$+13=0.$
Suites en $x+1$ . .	24	$+36$	-26	-7	$+6$
$x+2$ . .	24	$+60$	$+10$	-33	-27
$x+3$ . .	24	$+84$	$+70$	-23	-50
$x+4$ . .	24	$+108$	$+154$	$+47$	-3
$x+5$ . .	24	$+132$	$+262$	$+201$	$+198.$

Il y a deux racines négatives; elles se trouvent l'une entre 1 et 2, l'autre entre 4 et 5.

Autre exemple. . . $x^4 + 16x^3 + 99x^2 + 228x + 144 = 0$.

L'uniformité des signes de cette équation annonce l'absence de toute racine positive.

En changeant les signes des termes de rang pair, on écrira . . . . $x^4 - 16x^3 + 99x^2 - 228x + 144 = 0$.

		-84	$+200$		
Suites en $x+1$ . .	24	-60	$+116$	-144	0
				-28	
Transf. en $x+1$ . .	x^3	$-12x^2$	$+57x$	-74	$=0$.
Suites en $x+2$ . .	6	-18	$+46$	-28	
$x+3$ . .	6	-12	$+28$	0	
			$+16$		

Transf. en $x+3$ . . $x^2 - 6x + 21 = 0$. Vu qu'on a changé les signes des termes de rang pair de la proposée, on écrira transf. en $x+3$. $x^2 + 6x + 21 = 0$, puis $(x+3)^2 + 6(x+3) + 21 = 0$, d'où $x + 3 + 3 = \sqrt{9-21}$, $x = -6 \pm \sqrt{-12}$.

Les quatre racines sont donc $x = -1$, $x = -3$, $x = -6 \pm \sqrt{-12}$.

EQUATIONS DU 5e DEGRÉ.

XXXVII. Soit proposée l'équation. $x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 36x^2 + 44x + 80 = 0$.

Suites en $x-0$ . .	120	$+72$	-12	-76		
$x-1$ . .	120	$+192$	$+60$	-88	$+4$	$+84$
$x-2$ . .	120	$+312$	$+252$	-28	-84	0
					-112	
Transf. en $x-2$ . .	x^4	$+8x^3$	$+21x^2$	$-22x$	-120	$=0$.
		$+60$	$+44$			
Suites en $x-3$ . .	24	$+84$	$+104$	$+8$	-112	
$x-4$ . .	24	$+108$	$+188$	$+112$	0	
				$+300$		
Transf. en $x-4$ . .	x^3	$+16x^2$	$+93x$	$+190$	$=0$.	

Pour avoir les racines négatives, on changera les signes

des termes de rang pair de la transformée en $x-4$, et on écrira . . . .

. . .	$x-4$	. . x^3	$-16x^2$	$+93x$	$-190=0.$
Suites en	$x-4+1$	. . 6	-26	$+78$	-112
	$x-4+2$	. . 6	-20	$+52$	-60
	$x-4+3$	. . 6	-14	$+32$	-28
	$x-4+4$	. . 6	-8	$+18$	-10
	$x-4+5$	. . 6	-2	$+10$	0
				$+8$	

Transf. en $x-4+5$, ou $x+1$. $x^2-x+8=0$; elle devient, à cause du changement de signes de la transformée en $x-4$, transf. en $x+1$ . . $x^2+x+8=0$, qui se change, par la substitution de $x+1$ pour x, en $(x+1)^2+(x+1)+8=0$, d'où $x+1+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}-8}$, $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{31}{4}}$.

Lorsque les coefficiens et le terme connu d'une équation donnent lieu de croire que les racines sont des nombres considérables, on fait $x=10x'$, afin de prendre les suites en $x-10$, en $x-20$, etc.

Exemple . . $x^3-30x^2-400x-1000=0$. En substituant $10x'$ pour x, cette équation devient . . . .

. . . . . .	$1000x'^3$	$-3000x'^2$	$-4000x'$	$-1000=0,$	
puis	x'^3	$-3{,}0x'^2$	$-4{,}00x'$	$-1{,}000$	
Suites en $x-10$	. 6	0,0	$-6{,}00$	$-7{,}000$	
$x-20$	. 6	$+6{,}0$	$-6{,}00$	$-13{,}000$	
$x-30$	. 6	$+12{,}0$	0,00	$-13{,}000$	
$x-40$	. 6	$+18{,}0$	$+12{,}00$	$-1{,}000$	
$x-50$	. 6	$+24{,}0$	$+30{,}00$	$+29{,}000.$	

On trouve une racine entre 40 et 50.

Transf. en $x-40$. $x^3+90x^2+2000x-1000=0$. On voit, sans autre calcul, que cette racine est comprise entre 40 et 41.

On abrége beaucoup le travail, en se servant des procédés indiqués n° 50, 51, 52. C'est en combinant, d'une manière méthodique, l'usage des suites et des transformées, qu'on

parviendra à rendre le calcul aussi facile, aussi expéditif que possible. Découvre-t-on, à l'inspection d'une suite, des racines égales? on se procure la transformée, afin d'abaisser l'équation. A-t-on besoin de passer, au moyen d'une suite quelconque, de la recherche des racines positives à celle des racines négatives, et *vice versâ?* on se procurera la transformée, lorsque cette suite n'est que du 4ᵉ degré et au dessous. Est-elle supérieure au 4ᵉ degré? on procédera comme il est dit n° 52.

CHAPITRE IV.

Des racines qu'on ne peut découvrir à l'aide des suites en $x-1$, $x-2$, etc.

XXXVIII. Lorsqu'au moyen des suites en $x-1$, $x-2$, $x-3$, etc., on ne parvient pas à découvrir toutes les racines d'une équation, on doit conclure que les racines à chercher, soit réelles, soit imaginaires, sont en nombre pair, et que ces réelles se trouvent comprises entre deux nombres entiers consécutifs.

XXXIX. Pour obtenir les réelles, il faut rendre l'inconnue 10 fois, 100 fois, 1000 fois, etc., plus petite, c'est-à-dire qu'il faut la rendre plus petite que la différence qui existe entre les deux racines les plus voisines. Pour cela, on supposera successivement $x=\frac{x'}{10}$, $x'=\frac{x''}{10}$, $x''=\frac{x'''}{10}$, etc. Et comme, en substituant dans la proposée $x+p$ pour x, on obtient (n° 13) la transformée en $x-p$, il s'ensuit que pour découvrir les racines que la proposée peut avoir entre p et $p+1$, il n'y a qu'à trouver, dans l'équation en $x-p$, les valeurs de l'inconnue entre 0 et 1. On fera dans cette vue $x-p=\frac{x'}{10}$, $x'-p'=\frac{x''}{10}$, $x''-p''=\frac{x'''}{10}$ etc.

Si la transformée en $x-p$ a des variations de signes de plus que celle en $x-p-1$, le dernier terme de chacune étant de même signe, on doit soupçonner qu'il y a des valeurs de $x-p$ entre 0 et 1. La succession des signes fait même connaître avec certitude le lieu des racines réelles ; elle sert encore pour la recherche des imaginaires.

Soit pour exemple, l'équation . . . .
. . . $x^3 \quad 0 - 7x + 7 = 0.$ $\quad x^3 \quad 0 - 7x + 7 = 0.$
Suites transf.
en $x-1$. $6 + 6 - 6 + 1$ . . en $x-1$. $1 + 3 - 4 + 1$
$x-2$. $6 + 12 \quad 0 + 1$ . . $x-2$. $1 + 6 + 5 + 1$.

La transformée en $x - 1$ a deux variations de signes de plus que celle en $x - 2$, ce qui annonce qu'on doit chercher deux racines, ou réelles, ou imaginaires entre $x-1$ et $x-2$. Pour s'assurer si elles sont réelles, on supposera $x - 1 = \frac{x'}{10}$, ou $10(x - 1) = x'$; l'équation en x' s'obtient en ajoutant des zéros à la suite des coefficiens de la transformée en $x - 1$, et l'on a . . . .

. . .	$10x - 10$ . .	x'^3	$+ 30\, x'^2$	$- 400\, x'$	$+ 1000 = 0.$
Suites en	$10x - 11$ . .	6	$+ 66$	$- 369$	$+ 631$
	$10x - 12$ . .	6	$+ 72$	$- 303$	$+ 328$
	$10x - 13$ . .	6	$+ 78$	$- 231$	$+ 97$
	$10x - 14$ . .	6	$+ 84$	$- 153$	$- 56$
	$10x - 15$ . .	6	$+ 90$	$- 69$	$- 125$
	$10x - 16$ . .	6	$+ 96$	$+ 21$	$- 104$
	$10x - 17$ . .	6	$+ 102$	$+ 117$	$+ 13.$

L'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$ a deux racines réelles, comprises entre 1 et 2; elles sont $x = 1,3$, $x = 1,6$ à moins d'un dixième près; elles se trouvent annoncées par des variations de signes à la ligne des résultats.

XL. Les racines que l'on cherche, au lieu d'être réelles, peuvent être imaginaires. Il serait donc fort avantageux d'avoir un *criterium*, pour distinguer avec certitude les réelles des imaginaires, et réciproquement. Ce *criterium* paraît devoir être une conséquence de la méthode des suites; mais en attendant que l'auteur ait le loisir de réaliser ses vues à cet égard, il est bon de rapporter le *criterium* de M. Budan, et d'y ajouter quelques observations qui dispensent souvent d'en faire usage.

Lorsqu'une transformée en $x - p$ a au moins deux variations de signes de plus que celle en $x - p - 1$, tandis que les termes connus de ces deux transformées sont affectés du même signe, on doit s'assurer s'il n'existe pas de racines réelles entre

p et $p+1$. Pour cela, on supposera dans la transformée en $x-p$, $x=\frac{1}{z}$; les coefficiens de l'équation en z seront ceux de l'équation en $x-p$, écrits à rebours : cela fait, on se procurera la transformée en $z-1$ de la manière indiquée (n° 10); et l'absence de toute variation de signes dans cette transformée en $z-1$, indique d'une manière certaine qu'il n'existe pas de racines réelles, comprises entre les nombres p et $p+1$: car toutes les fois que x ne sera pas une fraction, $\frac{1}{x}-1$ ou $z-1$ sera une quantité négative, et les termes de la transformée en $z-1$ ne pourront être affectés que du signe $+$, excepté le seul cas où un ou plusieurs couples de racines imaginaires, dont la partie réelle est comprise entre p et $p+1$, ont leur partie précédée du signe — sous le signe radical, plus petite que $\frac{1}{4}$.

En effet, ces imaginaires auront la forme $x=f\pm\sqrt{-g}$, $z=\frac{1}{f\pm\sqrt{-g}}=\frac{f\mp\sqrt{-g}}{f^2+g}$ et $z-1=\frac{f}{f^2+g}-1\mp\frac{\sqrt{-g}}{f^2+g}$; la partie réelle $\frac{f}{f^2+g}-1$ ne peut être positive, à moins que le dénominateur f^2+g ne soit plus petit que f; ce qui n'a lieu qu'autant que f et g sont des fractions, et qu'on a $g<f-f^2$ ou $g<f(1-f)$; d'où il suit que g est alors moindre que $\frac{1}{4}$ ou 0,25; vu que $\frac{1}{4}$ est, comme on le sait, le plus grand produit que puisse donner une fraction multipliée par son complément à l'unité.

On voit donc que les imaginaires dont la partie précédée du signe moins sous le signe radical est plus petite que 0, 25, peuvent seules donner lieu à des variations de signes dans la transformée en $z-1$, et laisser subsister la présomption de l'existence de racines réelles entre 0 et 1, (c'est-à-dire entre p et $p+1$), dans l'équation en $x-p$.

Ce cas d'exception s'évanouit nécessairement au moyen des transformées en $x-p=\frac{x'}{10}$, $x'-p'=\frac{x''}{10}$, $x''-p''=\frac{x'''}{10}$, etc., ainsi qu'on le verra ci-après.

Pour l'intelligence du *criterium* des imaginaires, soit l'équation . . . . $x^3 \quad 0 - 2x + 5 = 0$.

Suites en $x - 1$ . . $6 + 6 - 1 + 4$

$x - 2$ . . $6 + 12 + 5 + 9$.

La transformée en $x - 1$ est $x^3 + 3x^2 + x + 4 = 0$, dont tous les coefficiens sont affectés du même signe; la proposée présente, au contraire, deux variations de signes. En supposant dans celle-ci $x = \frac{1}{z}$, on a $\frac{1}{z^3} - \frac{2}{z} + 5 = 0$, ou $5z^3 - 2z^2 + 1 = 0$; la transformée en $z - 1$ est $5z^3 + 13z^2 + 11z + 4 = 0$ dans laquelle on ne voit aucune variation de signes; ce qui prouve qu'il n'existe pas de racines réelles entre la proposée et sa transformée en $x - 1$.

XLI. Il est à observer que la transformée en $x - 1$ a tous ses termes positifs, tandis que l'avant-dernier terme de la suite en $x - 1$ est seul négatif.

Toutes les fois que cette circonstance a lieu pour une suite et une transformée en $x - p - 1$, dont le dernier terme n'est pas zéro, on a lieu de croire à l'existence d'un ou de plusieurs couples de racines imaginaires, pourvu que la transformée en $x - p$ ait 2, ou 4, ou 6, etc., variations de signes de plus que celle en $x - p - 1$. Cette présomption, que l'on peut considérer comme une certitude, est fondée sur ce que la suite et la transformée en $x - p - 1$ étant, l'une et l'autre, limites des racines comprises entre p et $p + 1$, les variations de signes de la suite annoncent qu'il y a des racines plus grandes que $p + 1$, tandis que l'absence de ces variations dans la transformée indique le contraire.

Autre exemple . . $x^3 \quad 0x^2 - 8x + 32 = 0$.

Suites en $x - 1$ . . $6 + 6 - 7 + 25$

$x - 2$ . . $6 + 12 - 1 + 24$

$x - 3$ . . $6 + 18 + 11 + 35$.

Dans cet exemple, la suite en $x - 2$ a son 3[e] terme négatif, tandis que la transformée en $x - 2$ a tous ses termes positifs; la transformée en $x - 1$, qui est $x^3 + 3x^2 - 5x + 25 = 0$, a deux variations de signes. Pour avoir la transformée en $z - 1$,

on écrira $25 - 5 \quad + 3 \quad + 1$, dont on prendra les sommes

. . . 1[res]. $25 + 20 + 23 + 24$

. . . 2[es] $25 + 45 + 68$

. . . 3[es] $25 + 70$

. . . 4[e] 25.

La transformée en $z - 1$ est $25z^3 + 70z^2 + 68z + 24 = 0$ dont tous les termes sont positifs. Il est évident qu'une transformée quelconque en $z - 1$ ne peut avoir aucune variation de signes, toutes les fois que les sommes premières se trouvent affectées du même signe.

XLII. Quoiqu'on ne puisse trop multiplier les moyens de distinguer les racines imaginaires des racines réelles, la concision de ce travail ne permet pas d'en rapporter plusieurs autres. On peut dire, en un mot, que le problème à résoudre consiste à déterminer d'une manière générale les cas où une valeur réelle quelconque, substituée pour x dans la proposée, ne peut faire changer le signe de son dernier terme.

Soit l'équation $x^4 + 6x^3 - \quad 4x^2 - 46x + \ 203 = 0$.

$+ \ 48 - \quad 6$

Suites en $x - 1$. $24 + \ 72 + \ 42 \quad - \ 43 + \ 160$

$x - 2$. $24 + \ 96 + 114 \quad - \quad 1 + \ 159$.

On reconnaît à l'aide du *criterium* (n° 40), et de celui (n° 41), que la proposée a deux racines imaginaires dont la partie réelle est entre $x - 1$ et $x - 2$. On voit, en effet, que la transformée en $x - 2$ n'a point de variation de signes, tandis qu'il s'en trouve deux dans la suite en $x - 2$; qu'avec la transformée en $x - 1$, on forme l'équation en z . . $160z^4 - 32z^3 + 20z^2 + 10z + 1 = 0$, dont les sommes 1[res] . . . $160 + 128 + 148 + 158 + 159$, se trouvant toutes positives, annoncent l'uniformité des signes de la transformée en $z - 1$, qu'on appelle *collatérale*.

Autre exemple . . $x^3 \quad 0x^2 - 19x + 32 = 0$.

Suites en $x - 1$ . . $6 \ + \ 6 \ - 18 \ + 14$

$x - 2$. $6 + 12 - 12 + 2$

$x - 3$. $6 + 18 \quad 0 + 2$.

La transformée en $x - 2$ est $x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = 0$;

écrite à rebours, on a $2z^3 - 7z^2 + 6z + 1 = 0$, et la collatérale en $z - 1$ est $2z^3 - z^2 - 2z + 2 = 0$. Les variations de signes de cette dernière annoncent qu'entre les transformées en $x - 2$ et en $x - 3$ de la proposée, il se trouve deux racines, ou réelles, ou imaginaires, ayant leur partie précédée du signe moins sous le signe radical, plus petite que $1/4$. Pour reconnaître la nature de ces racines, on fera $x - 2 = \frac{x'}{10}$, et on aura la transformée en . . . .

	$10(x-2)$.	$x'^3 +$	$60x'^2$	$-700x'$	$+2000 = 0$.
Suites en	$10x - 21$.	6	$+126$	-639	$+1361$
	id. -22 .	6	$+132$	-513	$+848$
	id. -23 .	6	$+138$	-381	$+467$
	id. -24 .	6	$+144$	-243	$+224$
	id. -25 .	6	$+150$	-99	$+125$
	id. -26 .	6	$+156$	$+51$	$+176$.

La transformée $10x - 25$ est $x'^3 + 75x'^2 - 25x' + 125 = 0$, de laquelle on déduit l'équation en z'... $125z'^3 - 25z'^2 + 75z' + 1 = 0$, puis la collatérale en $z' - 1$. $125z'^3 + 350z'^2 + 400z' + 176 = 0$. On pouvait s'assurer de l'uniformité des signes de la collatérale, en prenant à rebours les sommes 1res de tous les coefficiens et du terme connu de la transformée en $10x - 25$. Ainsi l'application du *criterium* n° 40 fait connaître qu'il n'y a pas de racines réelles entre les transformées en $10x - 25$ et en $10x - 26$; d'où il suit que les racines annoncées par les transformées en $x - 2$ et en $x - 3$ sont aussi imaginaires.

Lorsque la collatérale en $z' - 1$ d'une transformée en $10(x - p) = x'$ a des variations de signes, l'existence des racines réelles peut être encore douteuse, parce qu'il est possible que ces variations dépendent d'imaginaires, dont la partie précédée du signe $-$ sous le signe radical soit plus petite que 0,0025. Dans ce cas, on a recours à la transformée en $10(x' - p') = x''$ et à la collatérale en $z'' - 1$. Cette dernière est-elle insuffisante? on se procure la transformée en $10(x'' - p'') = x'''$ et la collatérale en $z''' - 1$, etc.

On démontre ce qui vient d'être dit au moyen du raisonnement employé n° 40.

XLIII. On parvient à résoudre, en se servant de la méthode des suites, toute équation composée de racines réelles et d'un couple d'imaginaires. Cette résolution est même très facile, comme on a dû l'observer au chapitre 3, toutes les fois que les réelles sont toutes commensurables ; dans les cas contraires, il faut, pour se procurer par approximation le couple d'imaginaires, déterminer les irrationnelles aussi par approximation, ainsi qu'on le fera au chapitre suivant.

XLIV. Peut-on déterminer au moyen des suites et des transformées, les racines d'une équation du 4[e] degré composée de deux couples d'imaginaires?

Soit, pour cela, l'équation

$$x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 132x + 121 = 0.$$

		-60	$+118$		
Suites en $x-1$ . .	24	-36	$+58$	-85	$+36$
$x-2$ . .	24	-12	$+22$	-27	$+9$
$x-3$ . .	24	$+12$	$+10$	-5	$+4$
$x-4$ . .	24	$+36$	$+22$	$+5$	$+9$
				27	$+36.$

La suite en $x-3$ annonce au moins deux racines imaginaires. Si on se rappelle les observations du n° 33, on sera porté à admettre par analogie, dans la proposée, deux couples d'imaginaires égales deux à deux. Cette présomption se change en certitude, lorsqu'on se procure la transformée $x-3$ . . $x^4 \quad 0x^3 + 4x^2 \quad 0x + 4 = 0$, qui se résout à la manière des équations du second degré ; on en déduit, en substituant $x-3$ pour x, $(x-3)^4 + 4(x-3)^2 + 4 = 0$, puis $(x-3)^2 = -2 \pm \sqrt{0}$, $x-3 = \pm\sqrt{-2}$ et $x-3 = \pm\sqrt{-2}$, ou $x = 3 \pm \sqrt{-2}$ et $x = 3 \pm \sqrt{-2}$.

On peut encore résoudre la proposée de la manière suivante, qui s'applique à toutes les équations du 4[e] degré formées par deux couples de racines imaginaires, dont les parties réelles sont des nombres entiers.

L'uniformité des signes de la transformée en $x-3$ fait connaître que les racines ne peuvent être plus grandes que 3, tandis que les variations de la suite en $x-3$ annon-

cent que deux de ces racines ne peuvent être plus petites que 3. On se trouve donc autorisé à composer l'équation du 2e degré $(x-3+\sqrt{-c})(x-3-\sqrt{-c})=x^2-6x+9+c=0$.

Si l'on représente par $2a$ la partie réelle des deux autres racines, et que l'on n'oublie pas que le coefficient du second terme de la proposée est -12, on aura $2a-6=-12$, $2a=-6$, $a=-3$. Puisque 3 est la partie réelle de chacune de ces deux autres racines, on pourra se procurer encore une équation du second degré $(x-3+\sqrt{-d})(x-3-\sqrt{-d})=x^2-6x+9+d$.

Le produit des deux facteurs du 2e degré doit être une équation tout-à-fait identique avec la proposée. On a donc $(x^2-6x+9+c)(x^2-6x+9+d)=x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0$.

En exécutant la multiplication, on obtient

$$\begin{array}{llll}
x^2-6x+9+c & & & \\
x^2-6x+9+d & & & \\
\hline
x^4-6x^3+(9+c)\,x^2 & & & \\
\quad -6x^3+ & 36\,x^2 & -54x & \\
 & & -6cx & \\
 & +(9+d)\,x^2 & -54x & \\
 & & -6dx & +81 \\
 & & & +9c \\
 & & & +9d \\
 & & & +cd.
\end{array}$$

Puisque les termes de ce produit doivent être respectivement égaux à ceux de la proposée, on a $9+c+36+9+d=58$, d'où $9+c+9+d=22$, $c+d=4$; $-(54+6c+54+6d)=-132$, d'où $c+d=4$; $(9+c)(9+d)=81+9(c+d)+cd=121$, et $9(c+d)+cd=40$. Si l'on substitue, dans cette dernière, la valeur de c ou de d tirée de l'équation $c+d=4$, on trouvera $c=2$, $d=2$. Les quatre racines de la proposée sont encore $x-3\pm\sqrt{-2}$ et $x-3\pm\sqrt{-2}$.

Autre exemple. . . $x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 46x + 203 = 0$.

		48	$-$ 6		
Suite en $x-1$.	24	$+$ 72	$+$ 42	$-$ 43	$+$ 160
$x-2$.	24	$+$ 96	$+$ 114	$-$ 1	$+$ 159
$x-3$.	24	$+$ 120	$+$ 210	$+$ 113	$+$ 272.

On est autorisé à former l'équation du 2e degré $x^2 - 4x + 4 + c$. On a $2a - 4 = 6$, $a = 5$; l'autre facteur du second degré sera $x^2 + 10x + 25 + d$. Le produit de ces deux facteurs est $x^4 + 6x^3 - (11 - c - d)x^2 - (60 - 10c + 4d)x + 100 + 25c + 4d + cd = 0$, équation identique avec la proposée. En les comparant terme à terme, on trouve $-11 + c + d = -4$, d'où $c + d = 7$; $-60 + 10c - 4d = -46$, d'où $10c - 4d = 14$. En substituant, dans cette dernière équation, la valeur de c ou de d tirée de $c + d = 7$, on trouve $c = 3$, $d = 4$.

En procédant ainsi, on parvient à résoudre, sans difficulté, toutes les équations du 4e degré composées de deux couples de racines imaginaires, dont les parties réelles sont des nombres entiers. Est-il nécessaire d'observer que, sans autre calcul que celui que l'on exécute pour trouver les racines réelles, les suites et les transformées font connaître à une unité près, et souvent à moins, la partie réelle des imaginaires?

CHAPITRE V.

Méthode d'approximation.

XLV. Le procédé dont on a fait usage n° 39 pour découvrir les racines réelles, comprises entre deux nombres entiers consécutifs, sert encore pour déterminer les décimales des racines réelles dont on a obtenu la valeur à moins d'une unité près.

Pour avoir successivement les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc., il n'y a qu'à supposer $x - p = \frac{x'}{10}$, $x' - p' = \frac{x''}{10}$, $x'' - p'' = \frac{x'''}{10}$, etc., et former les équations en x', en x'',

puis en x''', etc. On doit continuer ces transformations jusqu'à ce qu'on soit parvenu à découvrir autant de racines, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a de variations de signes de plus dans la transformée en $x-p$ que dans celle en $x-p-1$. Alors l'inconnue se trouvera plus petite que la différence qui existe entre les deux racines les plus voisines; le lieu et le nombre des racines réelles seront déterminés; et on pourra, sans crainte d'inexactitude, se procurer des transformées d'après le procédé indiqué (n° 13), ou à l'aide des dérivées.

Lorsqu'une seule valeur de x, déterminée à moins d'une unité près, se trouve comprise entre deux nombres entiers p et $p+1$, on peut recourir sur-le-champ à ce procédé : toutefois il est souvent avantageux de ne l'employer qu'après avoir obtenu les dixièmes au moyen de la transformée en $10(x-p) = x'$.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 29 = 0.$$

Suites en $x-1$	. 6	-18	$+30$	$+1$
$x-2$	. 6	-12	$+12$	$+13$
$x-3$	. 6	-6	0	$+13$
$x-4$	. 6	0	-6	$+7$
$x-5$	. 6	$+6$	-6	$+1$
$x-6$	. 6	$+12$	0	$+1$.

On trouve une racine entre 0 et 1. La transformée en $x-5$. $x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$ a deux variations de signes de plus que celle en $x-6$.

En supposant $10(x-5) = x'$, on a la transformée

$$10x - 50 \;.\; x'^3 + 30x'^2 - 400x' + 1000 = 0.$$

Suites en $10x-51$	. 6	$+66$	-369	$+631$
id. -52	. 6	$+72$	-303	$+328$
id. -53	. 6	$+78$	-231	$+97$
id. -54	. 6	$+84$	-153	-56
id. -55	. 6	$+90$	-69	-125
id. -56	. 6	$+96$	$+21$	-104
id. -57	. 6	$+102$	$+117$	$+13$.

On reconnaît deux racines réelles qui sont $x = 5,3$, $x = 5,6$

à moins d'un dixième près. Veut-on se procurer d'autres décimales exactes pour la première de ces valeurs? on se servira de la transformée en $10x-53$. $x'^3+39x'^2-193x'+97=0$, dont on considérera les termes où sont x'^3 et x'^2 comme trop petits pour en tenir compte, puis on fera $-193x'+97=0$, d'où $x'=\frac{97}{193}=0,502$; après avoir substitué pour x', $10x-53$, on aura $10x-53=0,502$, $10x=53,502$, ou $x=5,3502$; les deux premières décimales sont exactes. Pour s'assurer de la valeur des décimales, on emploiera la transformée en $10x-54$. $x'^3+42x'^2-112x'-56=0$ dans laquelle on fera, sans tenir compte des deux premiers termes, $-112x'-56=0$, d'où $x'=-\frac{56}{112}=-0,50$; on substituera $10x-54$ pour x', et on aura $10x-54=-0,50$, $10x=54-0,50$, $x=5,350$. Il est à remarquer que la 3e décimale n'est point exacte, quoiqu'elle soit la même dans les deux résultats; il suffit de transformer en $1000x-5350$ pour s'assurer de la justesse de cette observation.

XLVI. *Autre exemple.* $x^3 \quad 0x^2 - 7x - 7 = 0$.

Suites en $x-1$ . .	6	$+6$	-6	-13
$x-2$ . .	6	$+12$	0	-13
$x-3$ . .	6	$+18$	$+12$	-1
$x-4$ . .	6	$+24$	$+30$	$+29$.

Une racine est comprise entre 3 et 4. Si l'on fait $x-3=\frac{x'}{10}$, et qu'on substitue $\frac{x'}{10}$ pour x dans la transformée en $x-3$. $x^3+9x^2+20x-1=0$, on aura . . . .

$10x-30$ ou x' . $x'^3+90x'^2+2000x'-1000=0$.

Suite en $10x-31$ . .	6	$+186$	$+2091$ $+2277$	$+1091$

Transf. en $10x-31$ . . $x'^3+93x'^2+2183x'+1091=0$.

Puisque la valeur de x' est entre 0 et 1, la racine dont on cherche toutes les décimales, ne peut avoir de dixièmes. En faisant, dans l'équation en x', $2000x'-1000=0$, on trouve $x'=0,5$. Si l'on ne néglige que x'^3, et qu'on substitue 0,5 pour

x' dans le terme $90x'^2$, on aura $90x' \times 0,5$ ou $45x' + 2000x' - 1000 = 0$, d'où $x' = \frac{1000}{2045} = 0,4889$. On substituera pour x' sa valeur $10x - 30$, et on trouvera $10x - 30 = 0,4889$, $10x = 30 + 0,4889$, $x = 3,04889$: les trois premières décimales sont exactes. Pour s'en assurer, on se servira de la transformée en $10x - 31$; on supposera d'abord $2183x' + 1091 = 0$, d'où $x' = -\frac{1091}{2183} = -0,499$, valeur que l'on substituera pour x' dans le terme $93x'^2$, et on aura $93x' \times -0,499 + 2183x' + 1091 = 0$, ou $-46,4x' + 2183x' + 1091 = 0$, d'où $x' = -\frac{1091}{2136,6} = -0,5106$; on remplacera x' par sa valeur $10x - 31 = -0,5106$, d'où $10x = 31 - 0,5106$, $x = 3,04894$, valeur qui s'accorde avec la précédente dans les trois premières et presque dans les quatre premières décimales. A-t-on besoin d'un grand nombre de décimales? on se procurera la transformée en $1000x - 3048$. Pour cela, on supposera $x = \frac{x''}{1000} + 3,048$, et on trouvera . . . .

$$\begin{array}{rl} x^3 = & \frac{x''^3}{1000^3} + \frac{9,144x''^2}{1000^2} + \frac{27,870912x''}{1000} + 28,316846592 \\ -7x = & \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{7,000000x''}{1000} - 21,336000000 \\ -7 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 7,000000000 \\ \hline x^3 - 7x - 7 = & \frac{x''^3}{1000^3} + \frac{9,144x''^2}{1000^2} + \frac{20,870912x''}{1000} - 0,019153408. \end{array}$$

On fera disparaître les diviseurs en supprimant la virgule, et la transformée en $1000x - 3048$ sera . . . .
$x''^3 + 9144x''^2 + 20870912x'' - 19153408 = 0$; on supposera $20870912x'' - 19153408 = 0$, d'où $x'' = \frac{19153408}{20870912} = 0,9177$; les trois premières décimales sont exactes. Après avoir substitué $0,9177$ pour x'' dans le terme $9144x''^2$, on aura $9144x'' \times 0,9177 = 8391,4 \,.\,.\, x''$; puis $8391x'' + 20870912x'' = 19153408$, d'où $x'' = \frac{19153408}{20879303} = 0,91733943$, et $x =$

3,04891733943. On s'assurera de l'exactitude de cette valeur de x, au moyen de la transformée en $1000x - 3049$.

Autre exemple.	x^3	$0x^2$	$- \quad 2x$	$-\quad 5 = 0.$	
Suites en $x-1$ . .	$6 + 6$	$-$	1	$- \quad 6$	
$x-2$ . .	$6 + 12$	$+$	5	$- \quad 1$	
$x-3$ . .	$6 + 18$	$+$	17	$+ 16$	
Transf. en $x-2$ . .	$x^3 + 6x^2$	$+$	$10x$	$- \quad 1$	

en $10(x-2)$ . . $x'^3 + 60x'^2 + 1000x' - 1000$; on tire de cette dernière $1000x' - 1000 = 0$, $x' = 1$; puis $60 \times 1 \times x' + 1000x' - 1000 = 0$, et $x' = \frac{1000}{1060} = 0{,}943$; les deux premières décimales sont exactes, et $x = 2{,}094$. On transformera en $x = \frac{x''}{1000} + 2{,}094$, opération que l'on peut faire sans avoir égard au diviseur de x'' et en supprimant la virgule dans les termes du produit.

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & x''^3 + 6{,}282x''^2 + 13{,}154508x'' + 9{,}181846584 \\
-2x = & \quad . \qquad . \qquad - 2{,}000000x'' - 4{,}188000000 \\
-5 = & \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad - 5{,}000000000
\end{array}
$$

Transf. $x''^3 + 6282x''^2 + 11154508x'' - 6153416 = 0$.

On en tire $11154508x'' = 6153416$, $x'' = \frac{6153416}{11154508} = 0{,}5516$; puis $0{,}5516 \times 6282x'' + 11154508x'' = 6153416$, d'où $x'' = \frac{6153416}{11157973} = 0{,}55148152$ . . ., et enfin $x = 2{,}09455148152$.

Lorsqu'on se sert de la transformée en $1000x - 2095$ pour calculer la valeur de x, on obtient $x = 2{,}09455148157$, résultat qui s'accorde avec le précédent, excepté la dernière décimale. Si, procédant comme Newton, on s'était procuré la transformée en $1000x - 20943$, on aurait obtenu un plus grand nombre de décimales exactes.

Pour abréger et rendre plus faciles les divisions, on se servira d'un procédé décrit dans plusieurs ouvrages d'arithmétique, procédé au moyen duquel le quotient n'est que fort peu altéré.

Lorsqu'on suppose égal à zéro le dernier terme de la transformée en $1000x - 2094$, et qu'on divise cette équation par

x'', on trouve transf. en $1000x - 2094$. $x''^2 + 6282x'' + 1154508 = 0$, puis $x'' + 3141 = \pm\sqrt{-1154508 + (3141)^2} = \pm\sqrt{-1288627} = \pm 1135\sqrt{-1}$. Après la substitution de $1000x - 2094$ pour x'', on a $1000x - 2094 + 3141 = \pm 1135\sqrt{-1}$, et $x = -1{,}047 \pm 1{,}135\sqrt{-1}$. De la transformée en $1000x - 2095$, on déduira $x = -1{,}047\,{}^1\!/_2 \pm 1{,}136\sqrt{-1}$, valeur un peu plus exacte que la précédente.

On voit qu'il suffit, dans les équations du 3e degré, de se procurer une seule racine pour trouver aussitôt les deux autres, à l'aide d'une équation du 2e degré.

XLVII. *Autre ex.* $x^4 - 11x^3 + 45x^2 - 83x + 56 = 0$.

		-54	$+92$		
Suites en $x - 1$ . .	24	-30	$+38$	-48	$+8$
$x - 2$ . .	24	-6	$+8$	-10	-2
$x - 3$ . .	24	$+18$	$+2$	-2	-4
$x - 4$ . .	24	$+42$	$+20$	0	-4
$x - 5$ . .	24	$+66$	$+62$	$+20$	$+16$.

On reconnaît l'existence de deux racines réelles incommensurables, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 4 et 5. On les déterminera comme il vient d'être prescrit n° 46; on trouvera $x = 1{,}5858$ et $x = 4{,}4142$. La somme de ces racines est 6, et leur produit 7, à moins d'un dix-millième près. Si l'on représente par a la somme des deux racines qui restent à trouver, et par b leur produit, on aura $a - 6 = -11$, $a = -5$, $b = \frac{56}{7} = 8$; cela, parce que le coefficient du second terme, pris en signe contraire, est la somme de toutes les racines, et le terme connu leur produit. Les racines à chercher sont donc celles de l'équation $x^2 - 5x + 8 = 0$, de laquelle on tire $x = 2{,}5 \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$. La proposée a donc deux racines réelles incommensurables et deux imaginaires. On a déterminé les imaginaires après s'être procuré les réelles, résultat que l'on pourra toujours obtenir dans tous les cas semblables.

La méthode d'approximation qui vient d'être exposée rec-

tifie tout ce que le procédé de Newton peut avoir de défectueux.

Lorsqu'en écrivant les termes des transformées en $x-p$, en $x'-p'$, en $x''-p''$, etc., on place en même temps des zéros à leur droite, on passe directement des suites en $x-p$, en $x'-p'$, en $x''-p''$, etc., aux transformées en $10(x-p)$, en $10(x'-p')$, en $10(x''-p'')$, etc.; ce qui abrége le travail.

Et si l'équation n'est que du 2e ou du 3e degré, on peut même passer, sans l'intermédiaire d'aucune transformée, des suites en $x-p$, $x'-p'$, $x''-p''$, à celles en $10\left(x-p-\frac{1}{10}\right)$, $10\left(x'-p'-\frac{1}{10}\right)$, $10\left(x''-p''-\frac{1}{10}\right)$, etc.

CHAPITRE VI.

De la Méthode des suites proprement dite.

XLVIII. On a fait connaître n° 2, 3, 4 et 5, la manière de former les suites premières pour les équations des 2e, 3e, 4e et 5e degrés. Afin de compléter ce qui reste à dire sur cette matière, on commencera, dans ce chapitre, par présenter un tableau triangulaire, au moyen duquel on se procurera facilement la suite première pour une équation d'un degré quelconque. Ce tableau sera encore fort commode pour passer d'une suite en $x-p-1$ à la transformée en $x-p$.

Le passage des suites aux transformées, si facile pour les équations des quatre premiers degrés, n'est point aussi nécessaire qu'on pourrait le croire; car on ne tardera pas à exposer un procédé pour abaisser une équation d'autant de degrés, qu'on trouve de racines commensurables, et cela, sans ralentir le calcul.

Enfin on appliquera la méthode des suites à l'extraction des racines quelconques des nombres.

XLIX. *TABLEAU triangulaire pour la formation de la Suite première d'une équation d'un degré quelconque.*

DEGRÉS.	9e	8e	7e	6e	5e	4e	3e	2e	1er	
9e I	(x^9) 362880	1451520	2328480	1905120	834120	186480	18150	510	1	I′
8e	H	(x^8) 40320	141120	191520	126000	40824	5796	254	1	H′
7e		G	(x^7) 5040	15120	16800	8400	1806	126	1	G′
6e			F	(x^6) 720	1800	1560	540	62	1	F′
5e				E	(x^5) 120	240	150	30	1	E′
4e					D	(x^4) 24	36	14	1	D′
3e						C	(x^3) 6	6	1	C′
2e							B	(x^2) 2	1	B′
1er									(x) 1	A
Multiplicateurs.	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Formation du Tableau de la page ci-contre.

Pour former ce tableau, on procède de droite à gauche et de bas en haut. Dans la colonne verticale de x, qui est le plus à droite, on ne trouve que des unités qui sont les derniers termes des suites BB′, CC′, DD′, etc.

Pour avoir la colonne verticale x^2, on multiplie par 2 le terme qui est le plus inférieur du triangle, et on écrit le produit à côté de x^2. On ajoute 1 de la suite BB′ à 2 de la même suite; on multiplie la somme par 2, et on écrit le produit 6 sur la ligne CC′, au-dessus de 2. On ajoute les deux derniers termes de la suite CC′; on multiplie la somme par 2, et on écrit le produit, qui est 14, sur la ligne DD′. En continuant de procéder ainsi de bas en haut sur les deux derniers termes de chaque suite, on se procurera successivement tous les termes de la colonne verticale x^2.

Veut-on trouver ceux de la colonne verticale x^3? on multiplie 2, qui est le 1er terme de la suite BB′, par 3, et on écrit le produit 6 à côté de x^3; on ajoute les deux premiers termes de la suite CC′; on multiplie la somme par 3, et on place le produit 36 sur la ligne DD′. Si l'on multiplie aussi par 3 la somme des termes 36 et 14 de la suite DD′, on obtiendra 150 qu'on écrira sur la ligne EE′. En répétant ce procédé sur le terme qu'on vient de trouver et sur celui qui est immédiatement à droite, on aura tous les termes de la colonne verticale x^3. Celle-ci et le multiplicateur 4 serviront, en procédant comme il vient d'être prescrit, pour trouver tous les termes de la colonne verticale x^4. On passera de cette dernière à la colonne x^5, au moyen du multiplicateur 5; et ainsi de suite. On voit combien il est facile d'agrandir indéfiniment ce tableau.

Usage du Tableau triangulaire.

Pour former la suite première d'une équation du 9e degré, dont aucun des coefficiens n'est zéro, on se sert de tous les termes compris dans le triangle IAI′. Le triangle HAH′ suffit

pour la suite première d'une équation du 8e degré ; le triangle GAG$'$, pour celle du 7e degré ; le triangle FAF$'$, pour celle du 6e ; le triangle EAE$'$, pour celle du 5e ; DAD$'$, pour celle du 4e ; CAC$'$, pour celle du 3e ; enfin BAB$'$, pour celle du 2e degré.

A-t-on besoin de la suite première d'une équation du 6e degré? on se procurera au moyen du triangle FAF$'$ tel terme de cette suite qu'on voudra. Pour avoir, par exemple, le 4e terme, on se servira de la colonne verticale x^3 ; on prendra 6 fois le coefficient de x^3, 36 fois celui de x^4, 150 fois celui de x^5, 540 fois celui de x^6. On emploiera la colonne verticale x^4 pour obtenir le 3e terme ; il comprendra 24 fois le coefficient de x^4, 240 fois celui de x^5, 1560 fois celui de x^6.

Désire-t-on le troisième terme de la suite première d'une équation du 5e degré? on trouvera, en se servant du triangle EAE$'$ et de la colonne verticale x^3, que ce terme doit comprendre 6 fois le coefficient de x^3, 36 fois celui de x^4, 150 fois celui de x^5 ; valeur déjà assignée n° 5. Toutes autres explications paraissent devoir être inutiles.

L. Toutes les fois que le dernier terme d'une suite en $x \mp p$ est égal à zéro, une des racines est égale à $\pm p$, et on peut abaisser l'équation d'un degré. Pour cela, on formera la suite en $x \mp p \mp 1$, excepté le dernier terme ; on divisera le 1er terme de cette suite par m, le second par $m-1$, le 3e par $m-2$ . . . ., l'avant-dernier par $m-m+2$; on ajoutera ce dernier quotient au dernier terme de la suite en $x \mp p \mp 1$; la somme et les quotiens obtenus seront les termes de la suite en $x \mp p \mp 2$, qui se trouvera abaissée d'un degré.

Lorsque le dernier terme de la suite en $x \mp p \mp 1$ est zéro, l'équation a une racine égale à $\pm p \pm 1$; pour abaisser encore cette équation, on ne formera pas le dernier terme de la suite en $x \mp p \mp 2$, dont on divisera le 1er terme par $m-1$, le 2e par $m-2$, le 3e par $m-3$, etc. Dans cet état de choses, la suite en $x \mp p \mp 2$ est du degré $m-1$, et celle en $x \mp p \mp 3$ du degré $m-2$. En procédant de cette manière, les suites, et par conséquent l'équation, se trouvent abaissées d'autant de degrés que l'on trouve de racines commensurables.

Soit, pour ex., l'équation $x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 172x - 160 = 0$.
$- 48 \quad - 4$

4ᵉ degré.. Suites en $x-1$..	24	-24	-52	$+160$		0
id. . . . . $x-2$..	24	0	-76	$+108$		
3ᵉ degré. . . . $x-3$..	6	0	-38	$+70$		
id. . . . . $x-4$..	6	$+6$	-38	$+32$		
id. . . . . $x-5$..	6	$+12$	-32	0		
id. . . . . $x-6$..	6	$+18$	-20			
2ᵉ degré. . . . $x-7$..	2	$+9$	-11			
id. . . . . $x-8$..	2	$+11$	0			
id. . . . . $x-9$..	2	$+13$				
1ᵉʳ dégré. . . . $x-10$.	1	$+14$.				

Une suite du premier degré ne diffère pas de la transformée de ce degré ; il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur le tableau triangulaire. Dans l'exemple dont il s'agit, la transformée du 1ᵉʳ degré en $x-10$ est $x+14$, de laquelle on obtient, après avoir substitué $x-10$ à la place de x, $x+4=0$, $x=-4$. On a donc pour les quatre racines de la proposée $x=1$, $x=5$, $x=8$, $x=-4$.

Autre ex. . . $x^6 - 8x^5 - 12x^4 + 206x^3 - 349x^2 - 198x + 360 = 0$.

S. en $x-1$.	720	$+840$	-648	$+144$	$+192$	-360	0
6ᵉ deg. $x-2$.	720	$+1560$	$+192$	-504	$+336$	-168	
5ᵉ deg. $x-3$.	120	$+312$	$+48$	-168	$+168$	0	
id. $x-4$.	120	$+432$	$+360$	-120	0		
4ᵉ deg. $x-5$.	24	$+108$	$+120$	-60			
3ᵉ deg. $x-6$.	6	$+36$	$+60$	0			
id. $x-7$.	6	$+42$	$+96$				
2ᵉ deg. $x-8$.	2	$+21$	$+117$.				

La proposée a quatre racines positives qui sont $x=1$, $x=3$, $x=4$, $x=6$. La transformée du 2ᵉ degré en $x-8$ est $x^2 + 22x + 117 = 0$, de laquelle on déduira $x=-1$, $x=-5$; car on a $x-8+11 = \pm\sqrt{-117+121} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

LI. Une suite en $x-p-1$ peut s'abaisser aussitôt d'autant de degrés qu'elle annonce, nº 35, de racines respectivement égales aux nombres consécutifs p, $p+1$, $p+2$, etc.

Exemple.		x^4	$0x^3$	$-25x^2$	$+60x$	$-36=0$.
			$+12$	-48		
Suites en	$x-1$.	24	$+36$	-36	$+36$	0
	$x-2$.	24	$+60$	0	0	0
$(x-3)$	$x-4$:	2	$+10$			
	$x-5$.	1	$+11$.			

Les racines positives de la proposée sont $x=1$, $x=2$, $x=3$, et la racine négative $x-5+11=0$, $x=-6$. Est-il nécessaire de dire que le 1er terme de la suite en $x-2$ a été divisé par $4\times3=12$, et le second par $3\times2=6$?

LII. Il est facile et souvent utile de passer d'une suite en $x-p-1$ à la suite en $x-p+1$, c'est-à-dire, à la suite que l'on obtiendrait au moyen de la transformée en $x-p$, dont on aurait changé les signes des termes de rang pair.

Pour cela, on remplacera le dernier terme de la suite en $x-p-1$ par le dernier terme de la suite précédente, et on changera les signes des termes de rang pair. Ensuite, on écrira les deux premiers termes sur une même ligne horizontale; le 3e sur une ligne inférieure à celle du 2e; le 4e sur une ligne inférieure à celle du 3e; et ainsi du reste jusqu'au dernier terme, qui devra être sur la même ligne que le précédent et terminer la suite en $x-p-1+1$. On obtient cette dernière en formant, ligne après ligne, au moyen des termes placés sur diverses lignes, des suites qui sont incomplètes. Ces opérations s'exécutent avec tant de rapidité, qu'elles ne ralentissent à peine le calcul, que dans les cas où la suite en $x-p-1$ est d'un degré fort élevé.

Soit proposée, pour exemple, la suite . . . .
en $x-p-1$. $120\ +552\ +1020\ +956\ +468\ +576$.
Tr. en $x-p$. $x^5+13x^4+67x^3+171x^2+216x+108=0$.

En changeant les signes des termes de rang pair, on aura la transformée en . . . .
$x-p+0$ . . . $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$.
Suite en $x-p+1$. $120-72\ +84\ -92\ +100\ -8$.

Si de 576, dernier terme de la suite en $x-p-1$, on re-

tranche 468, qui est l'avant-dernier terme, le reste 108 sera le dernier terme de la suite précédente, c'est-à-dire, de la suite en $x-p$. En changeant les signes des termes de rang pair, la suite en $x-p-1$, dont le dernier terme doit être $+108$, deviendra . . $120-552+1020-956+468-108$; et ces termes devront être ainsi disposés :

Suites en . . . . . . $120-552$
. . . . . . $120-432+1020$
. . . . . . $120-312+588-956$
$x-p-1+1$. $120-192+276-368+468-108$
$x-p-1+2$. $120-72+84-92+100-8$.

On a recours à ce procédé pour passer de la recherche des racines positives à celle des racines négatives, et *vice versâ;* on s'en sert aussi pour se procurer les racines égales.

Exemple. $x^4-12x^3+4x^2+72x-200=0$.
$-60 \quad +10$

Suite en $x-1$. $24 \quad -36 \quad -50 \quad +65 \quad -135$.

Après avoir changé les signes des termes de rang pair de la proposée, on a

$x-1+1$ ou $x+0$. . $x^4+12x^3+4x^2-72x-200=0$.
$+84 \quad +10$

Suite en $x+1$. $24 \quad +108 \quad +94 \quad -55 \quad -255$.

A-t-on besoin de déterminer la suite en $x+1$, au moyen de la suite en $x-1$? on écrira suite . . . .
. . . $24+36-50-65-200$, puis

Suites en . $24+36$
. . . . . $24+60-50$
$x-1+1$ ou $x+0$. $24+84+10-65-200$
$x-1+2$ ou $x+1$. $24+108+94-55-255$.

Autre Exemple.

$x^8-12x^7+53x^6-92x^5-9x^4+212x^3-153x^2-108x+108=0$.

Suites en . . . .
$x-1$. $40320+80640+48240+8760+408-108+108-108 \quad 0$
$x-2$. $40320+120960+128880+57000+9168+300 \quad 0 \quad 0$
$x-3$. $5040+17280+21480+11400+2292+100 \quad 0$
$x-4$. $720+2880+4296+2850+764+50$
$x-5$. $120+576+1074+950+382+432$

Suite du même Exemple.

	120	− 576				
	120	− 456	+ 1074			
	120	− 336	+ 618	− 950		
$x-5+1$ . . .	120	− 216	+ 282	− 332	+ 382	− 50
$x-5+2$ . . .	120	− 96	+ 66	− 50	+ 50	0
$x-5+3$ . . .	120	+ 24	− 30	+ 16	0	
$x-5+4$ . . .	24	+ 6	− 10	+ 8		
$x-5+5$ . . .	6	+ 2	− 5	+ 3		
$x-5+6$ . . .	6	+ 8	− 3	0		
$x-5+7$ . . .	6	+ 14	+ 5			
$x-5+8$ . . .	2	+ 7	+ 12			
$x-5+8-1$	2	− 7	+ 5			
$x-5+8-2$	2	− 5	0			
$x-5+8-3$	2	− 3				
$x-5+8-4$	1	− 2.				

Comme on a opéré deux changemens de signes, l'un sur les termes pairs de la suite en $x-5$, l'autre sur ceux de la suite en $x-5+8$, on ne devra pas changer le signe du second terme de la transformée du 1er degré en $x-5+8-4$ ou $x-1$. Après la substitution de $x-1$ pour x dans cette transformée, qui devient $x-1-2=0$, on aura $x=3$. Les huit facteurs sont donc $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-3)$, $(x-3)$, $(x+1)$, $(x+1)$.

Lorsqu'on examine la suite en $x-5+6$, on reconnaît 1° deux racines égales; 2° une transformée du 1er degré en $x-5+6$ . . $x+4$, dont on doit changer le signe du second terme. Après ce changement, on a transf. en $x-5+6$ . . $x-4=0$, de laquelle on obtient, par la substitution de $x=5+6$ pour x, $x-5+6-4=0$, $x=3$.

Méthode des transformées proprement dite, ou Méthode de M. Budan.

LIII. Elle consiste à se procurer des transformées conformément à ce qui a été prescrit n° 10.

1er *Exemple*. . . . . $x^3 + 0x^2 - 17x + 4 = 0$.

Transformées en	$x-1$.	1	+ 3	− 14	− 12
	$x-2$.	1	+ 6	− 5	− 22
	$x-3$.	1	+ 9	+ 10	− 20
	$x-4$.	1	+ 12	+ 31	0.

Une racine est comprise entre 0 et 1; une autre est 4.

Pour trouver la racine négative, on changera les signes des termes de rang pair, et on écrira . . . .

$$x^3 \quad 0x^2 - 17x - 4 = 0.$$

Transformées en	$x+1$.	1	+ 3	− 14	− 20
	$x+2$.	1	+ 6	− 5	− 30
	$x+3$.	1	+ 9	+ 10	− 28
	$x+4$.	1	+ 12	+ 31	− 8
	$x+5$.	1	+ 15	+ 58	+ 36.

La racine négative est comprise entre 4 et 5.

2e *Exemple*. $x^3 + 30x^2 - 400x + 1000 = 0$.

Transform. en	$x-1$.	1	+ 33	− 337	+ 631
	$x-2$.	1	+ 36	− 268	+ 328
	$x-3$.	1	+ 39	− 193	+ 97
	$x-4$.	1	+ 42	− 112	− 56
	$x-5$.	1	+ 45	− 25	− 125
	$x-6$.	1	+ 48	+ 68	− 104
	$x-7$.	1	+ 51	+ 167	+ 13.

On reconnaît 2 racines réelles comprises, l'une entre 3 et 4, l'autre entre 6 et 7. Cette équation a été résolue n° 45.

3e *Exemple*. $x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 46x + 203 = 0$.

Transf. en	$x-1$.	1	− 2	− 16	+ 24	+ 240
	$x-2$.	1	+ 2	− 16	− 10	+ 247
	$x-3$.	1	+ 6	− 4	− 32	+ 224
	$x-4$.	1	+ 10	+ 20	− 18	+ 195
	$x-5$.	1	+ 14	+ 56	+ 56	+ 208.

4e *Exemple*. $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$.

Transf. en	$x-1$.	1	− 6	+ 12	− 8	0
	$x-2$.	1	− 3	+ 3	− 1	
	$x-3$.	1	0	0	0.	

Les racines de cette équation sont 1 et 3; cette dernière est triple.

Autre Méthode. $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$.

		-48	$+74$		
Suites en $x-1$.	24	-24	$+26$	-27	0
$x-2$.	24	0	$+2$	-1	
$x-3$.	6	0	$+1$	0.	

L'inspection des termes de la suite en $x-3$ fait découvrir trois racines égales chacune à trois. On reconnaît avec la même facilité les racines égales, lorsqu'une suite, dont le dernier terme est 0, ne s'élève pas au 5e degré.

5e *Exemple.* $x^6 - 8x^5 - 12x^4 + 206x^3 - 349x^2 - 198x + 360 = 0$.

Tr. en $x-1$.	1	-2	-37	$+98$	$+132$	-360	0
$x-2$.	1	$+3$	-35	-15	$+214$	-168	
$x-3$.	1	$+8$	-13	-92	$+96$	0	
$x-4$.	1	$+12$	$+17$	-90	0		
$x-5$.	1	$+15$	$+44$	-60			
$x-6$.	1	$+18$	$+77$	0.			

On trouve $x=1$, $x=3$, $x=4$, $x=6$. Cette équation a été résolue au moyen des suites n° 50.

On s'aperçoit, sans peine, de la différence qui existe, sous le rapport de la vitesse du calcul, entre la méthode de M. Budan et celle des suites proprement dite.

C'est surtout après l'extraction des racines des nombres, qu'on pourra facilement comparer cette nouvelle méthode aux méthodes connues.

Extraction des racines des nombres.

LIV. Pour extraire la racine m d'un nombre q, on résout l'équation $x^m - q = 0$. La suite 1re se trouve toute formée sur le tableau triangulaire, *n*° 49.

Pour l'extraction de la racine quarrée, on se servira de la suite $2+1$, qui est sur la ligne BB'; pour celle de la racine cubique, de la suite $6+6+1$, sur la ligne CC'; pour celle

de la racine 4e, de la suite DD′; pour la racine 5e, de la suite EE′, etc.

Lorsque $m=2$, on divise, en procédant de droite à gauche, le nombre q en tranches de deux chiffres chacune; la 1re à gauche peut être d'un seul chiffre.

Lorsque $m=3$, ces tranches doivent comprendre trois chiffres; la 1re à gauche peut en renfermer moins.

Si $m=4$, elles doivent être de 4 chiffres chacune, excepté la 1re à gauche qui peut en avoir moins, etc.

On doit trouver autant de chiffres à la racine que l'on compte de tranches dans le nombre proposé. Si l'on ajoute à la droite de ce nombre des tranches formées par des zéros, chacune d'elles fournira une décimale à la racine.

Lorsqu'on considère comme un nombre entier la première tranche à gauche du nombre proposé, et tous les autres chiffres comme des décimales, on déterminera au moyen des suites et des transformées, 1° les unités; 2° les dixièmes; 3° les centièmes, etc. Pour cela, il faudra avoir l'attention de placer à la droite de chaque reste, une tranche du nombre proposé, et ce, toutes les fois qu'on transformera en $x-p=\frac{x'}{10}$, en $x'-p'=\frac{x''}{10}$, en $x''-p''=\frac{x'''}{10}$, etc. Après avoir obtenu successivement autant de chiffres qu'on en désire à la racine, on y place la virgule de manière à séparer autant de chiffres sur la gauche, qu'il se trouve de tranches dans le nombre proposé.

Extraire la racine quarrée de 334084.

Ce nombre se compose de trois tranches de deux chiffres chacune, savoir, 33, 40, 84. Soit l'équation du 2e degré . .

$$x^2 \quad 0x - 33{,}4084 = 0.$$

Suites en	$x-1$	. 2	$+1$	-32,
	$x-2$	. 2	$+3$	-29,
	$x-3$	. 2	$+5$	-24,
	$x-4$	. 2	$+7$	-17,
	$x-5$	. 2	$+9$	$-8{,}40$ . .
	$x-6$	. 2	$+11$	$+2{,}60$ . .

Transf. en	$x - 5$	.	$x^2 + 10x$		$-8,40$ . .
en	$10x - 50$	.	$x'^2 + 100x'$		-840,
Suites en	$10x - 51$	.	2	$+101$	-739,
	id. $- 52$	.	2	$+103$	-636,
	id. $- 53$	.	2	$+105$	-531,
	id. $- 54$	.	2	$+107$	-424,
	id. $- 55$	.	2	$+109$	-315,
	id. $- 56$	.	2	$+111$	-204,
	id. $- 57$	.	2	$+113$	$-91,84$
Transf. en	$10x - 57$	:	$x'^2 + 114x'$		$-91,84$
	$100x - 570$	.	$x''^2 + 1140x''$		-9184
Suites en	$100x - 571$	.	2	$+1141$	-8043
	id. $- 572$	.	2	$+1143$	-6900
	id. $- 573$	.	2	$+1145$	-5755
	id. $- 574$	.	2	$+1147$	-4608
	id. $- 575$	.	2	$+1149$	-3459
	id. $- 576$	.	2	$+1151$	-2308
	id. $- 577$	.	2	$+1153$	-1155
	id. $- 578$	.	2	$+1155$	0.

On trouve $100x = 578$; et comme la valeur de x a été rendue 100 fois plus petite, on a donc $x = 578$; la racine quarrée de 334084 est 578.

Extraire la racine 4ᵉ de 325482.

	x^4	$0x^3$	$0x^2$	$0x$	$-32,5482$
Suites en $x-1$.	24	$+36$	$+14$	$+1$	$-31,5482$
$x-2$.	24	$+60$	$+50$	$+15$	$-16,5482$
$x-3$.	24	$+84$	$+110$	$+65$	$+48,4518$
Transf. en $x-2$.	x^4	$+8x^3$	$+24x^2$	$+32x$	$-16,5482$
en $10x-20$.	x'^4	$+80x'^3$	$+2400x'^2$	$+32000x'$	-165482
		$+492$	$+4802$		
Suit. en $10x-21$.	24	$+516$	$+5294$	$+34481$	-131001
id. -22 .	24	$+540$	$+5810$	$+39775$	-91226
id. -23 .	24	$+564$	$+6350$	$+45585$	-45641
id. -24 .	24	$+588$	$+6914$	$+51935$	$+6294$.

La racine 4ᵉ de 325482 est 23, et il reste 45641.

LV. Il serait un peu long de chercher l'un après l'autre

tous les chiffres de la racine. Pour se les procurer promptement, on se servira de la méthode d'approximation exposée (n° 45 et 46) pour la résolution des équations ; mais auparavant, on déterminera les deux premiers chiffres à l'aide des suites et des transformées, ainsi qu'il vient d'être dit; enfin, on placera une virgule à la racine pour séparer les unités des dixièmes.

Cette méthode est surtout facile pour l'extraction des racines, parce qu'en substituant pour x, dans l'équation $x^m - q = 0$, une valeur quelconque $x' + a$, on obtient la transformée en $x - a$, au moyen du binome de Newton.

En effet, l'équation $x^m - q = 0$, devient $(a + x')^m - q = 0$, ou $0 = -q + a^m + m\,a^{m-1}x' + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{m-2}x'^2 + \ldots$ etc. Si on néglige tous les termes qui se trouvent après $m\,a^{m-1}x'$, et qu'on suppose égale à $-b$ la somme des deux termes connus $-q + a^m$, qui doit être négative, on aura $b = m\,a^{m-1}x'$, d'où $x' = \frac{b}{ma^{m-1}}$; lorsqu'on met cette valeur pour x' dans le terme $\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{m-2}x'^2$, et qu'on néglige tous les termes suivans, on a $b = m\,a^{m-1}x' + \frac{m\,(m-1)\,a^{m-2}b}{1\,.\,2\,.\,ma^{m-1}}x'$; en faisant disparaître le diviseur du dernier terme, l'équation devient $2ma^{m-1}b = 2\,.\,ma^{m-1} \times ma^{m-1}x' + m\,(m-1)\,a^{m-2}\,bx'$. Après avoir divisé les deux membres par ma^{m-1}, il reste $2b = 2ma^{m-1}x' + \frac{(m-1)}{a}\,bx'$, d'où $x' = \frac{2ab}{2ma^m + (m-1)b}$. On se sert de la transformée en $x - a - 1$, pour vérifier les résultats que l'on obtient avec cette formule, qui devient alors $x' = \frac{2ab}{2\,ma^m - (m-1)b}$; car, dans ce cas, la somme des deux termes $-q + a^m$ est une quantité positive. Lorsque $m = 2$, la formule se change en $x' = \frac{2ab}{4a^2 \pm b}$; et si $m = 3$, on a $x' = \frac{ab}{3a^3 \pm b}$.

Extraire la racine cubique de 30532841725526. Ce nombre 30,532,841,725,526 comprend cinq tranches; la 1re à gauche n'a que deux chiffres.

On écrira .	x^3	$0x^2$	$0x$	$-30,532,841,725,526=0$.
S. en $x-1$.	6	$+6$	$+1$	-29,
$x-2$.	6	$+12$	$+7$	-22,
$x-3$.	6	$+18$	$+19$	-3,
			$+37$	
Tr. en $x-3$.	x^3	$+9x^2$	$+27x$	$-3,532$,
en $10x-30$.	x'^3	$+90x'^2$	$+2700x'$	-3532,
S. $10x-31$.	6	$+186$	$+2791$	-741,
			$+2977$	
T. $10x-51$.	x'^3	$+93x'^2$	$+2883x'$	$-741,\ldots=0$.

On tire de cette dernière $x'=\frac{741}{2883}$, ou $x'=\frac{741,841}{2883}=$ 0,257; on substituera cette valeur de x' dans le terme $93x'^2$, qui deviendra $0,257\times93x'$, ou $23,901x'$, ou $24x'$ en remplaçant les décimales par l'unité; on aura alors $24x'+2883x'=741,841$, d'où $x'=\frac{741,841}{2907}=0,25519$, valeur dont les trois premières décimales sont exactes. La racine du nombre proposé, qui ne doit être que de cinq chiffres, les décimales non comprises, est donc 31255. Veut-on se procurer plusieurs décimales en même temps? on se servira de la formule $x''=\frac{ab}{3a^3+b}$; on fera $a=3,1255$; $a^3-q=-b$, ou $a^3+b=q$ (q désigne le nombre donné dont tous les chiffres, excepté ceux de la 1re tranche à gauche, sont des décimales); et on trouvera $a^3=30,532228906375$; $b=0,000612819151$; $ab=0,0019153662564505$; $3a^3+b=91,597299538276$; on a donc $x''=\frac{0,0019153662564505}{91,597299538276}=0,0000209107284\ldots$

La racine du nombre proposé est 31255,209107284. . . . ; ces neufs décimales sont exactes. Pour s'en assurer, on supposera $a=3,1256$.

LVI. Le calcul s'exécute plus facilement au moyen des transformées qu'avec la formule de Haros.

Si dans l'équation $x^m - q = 0$, on suppose $m = 3$ et $x = x'' + a$, on aura $x''^3 + 3\,a\,x''^2 + 3\,a^2\,x'' + a^3 - q = 0$, qui peut représenter une transformée quelconque. Pour avoir celle en $10000\,x - 31255$, on fera $a = 3{,}1255$; et, après avoir supprimé la virgule dans les termes du produit, on trouvera $x''^3 + 93765\,x''^2 + 2930625075\,x'' - 612819151 = 0$. On en déduit $x'' = \frac{612819151}{2930625075} = 0{,}2091$; puis $0{,}2091 \times 93765\,x'' + 2930625075\,x'' = 612819151$, d'où l'on tire, en supprimant les décimales du 1er coefficient, $x'' = \frac{612819151}{2930644681} = 0{,}209107284\ldots$

Extraire la racine quarrée de 54724.

Comme ce nombre est composé de trois tranches, on doit trouver trois chiffres à la racine, les décimales non comprises.

		x^2	$0x$	$-5{,}4724 = 0.$
Suites en	$x - 1$	. 2	$+1$	$-4,$
	$x - 2$	. 2	$+3$	$-1,$
Transf. en	$x - 2$	. x^2	$+4x$	$-1{,}47,$
en	$10x - 20$	. x'^2	$+40x'$	$-147,$
Suites en	$10x - 21$	. 2	$+41$	$-106,$
	$10x - 22$	. 2	$+43$	$-63,$
	$10x - 23$	. 2	$+45$	$-18,$
Transf. en	$10x - 23$	. x'^2	$+46x'$	$-18{,}24$
en	$100x - 230$	. x''^2	$+460x''$	-1824
Suites en	$100x - 231$	. 2	$+461$	-1363
	id. $- 232$	. 2	$+463$	-900
	id. $- 233$	. 2	$+465$	-435
	id. $- 234$	. 2	$+467$	$+32$

Transf. en $100x - 233$. $x''^2 + 466x'' - 435 = 0$. On en tire d'abord $x'' = \frac{435}{466} = 0{,}933\ldots$; on substitue cette valeur pour x'' dans le terme x''^2, et on a $0{,}933 \times x'' + 466x'' = 435$, d'où $x'' = \frac{435}{466{,}933} = 0{,}931611\ldots.$ De la transformée en $100x - 234$, on déduit $x'' = -\frac{32}{468} = -0{,}068\ldots$, puis

$-0,068x'' + 468x'' = -32$, et $x'' = -\dfrac{32}{467,932} = -0,068386.$
Cette valeur s'accorde dans ses cinq premières décimales avec celle obtenue au moyen de la transformée en $100x - 233$; car, en substituant pour x'' sa valeur $100x - 234$, on aura $100x - 234 = -0,068386...$, ou $100x = 233,931613...$, puis $x = 2,33931613...$; comme la valeur de x a été rendue 100 fois plus petite, on la rendra 100 fois plus grande, et on aura pour la racine cherchée 233,93161. . .

Extraire la racine quarrée de 235420843175 1.

Ce nombre comprend sept tranches, et doit avoir sept chiffres à la racine, sans compter les décimales.

Dans l'équation $x^m - q = 0$, $m = 2$, $q = 2,354208431751$; on a donc à résoudre . . $x^2 \quad 0x \quad - 2,354208431751 = 0$.

Suite en	$x - 1$	. .	2	$+1$	-1,
Transf. en	$x - 1$	. .	x^2	$+2x$	$-1,35$,
en	$10x - 10$	. .	x'^2	$+20x'$	-135,
Suites en	$10x - 11$	. .	2	$+21$	-114,
	id. -12	. .	2	$+23$	-91,
	id. -13	. .	2	$+25$	-66,
	id. -14	. .	2	$+27$	-39,
	id. -15	. .	2	$+29$	-10,
Transf. en	$10x - 15$	. .	x'^2	$+30x'$	$-10,4208... = 0$.

On en tire $x' = \dfrac{10,4208}{30} = 0,3473$ . . , puis $x' = \dfrac{10,420843}{30,347} = 0,3433$ . . . ; les trois premières décimales sont exactes, parce que de la transformée en $10x - 16$, on déduit $x' = -0,6562...$, $10x = 15,3437...$, $x = 1,53437$. .

Lorsque, dans l'équation $x^m - q = 0$, on suppose $m = 2$ et $x = x'' + a$, on a $x''^2 + 2ax'' + a^2 - q = 0$. Cette dernière représente une transformée quelconque de $x^2 - q = 0$. Pour avoir la transformée en $10000x - 15343$, on fera $a = 1,5343$; on supprimera la virgule dans les termes où elle se trouvera, puis on la placera dans le terme $a^2 - q$, de manière qu'il y ait autant de décimales qu'il s'en trouve de plus dans q que dans a^2; après cela, on aura $x''^2 + 30686x'' -$

13194,1751 = 0. On en déduit $x'' = \frac{13194,1751}{30686} = 0,4299 =$ 0,43..; $0,43x'' + 30686x'' = 13194,1751$, $x'' = \frac{13194,1751}{30686,43} =$ 0,429967744. . . . De la transformée en $10000x - 15344$, on obtient $x'' = -0,570032254$, valeur qui s'accorde avec la précédente dans les huit premières décimales; on a donc pour la racine cherchée 1534342,996774 . . .

LVII. On serait parvenu plus promptement à cette racine, et avec un plus grand nombre de décimales, si, en se bornant à la 4e décimale dans la valeur de $x' = 0,3433$. . . , on avait vérifié cette valeur au moyen de la transformée en $100000x -$ 153433. Celle-ci est $x''^2 + 306866x'' - 398828,51 = 0$; on en tire $x'' = \frac{398828,51}{306866} = 1,29968$. . . . Après la substitution de cette valeur pour x'' dans le terme x''^2, on a $1,29968x'' +$ $306866x'' = 398828,51$; d'où, sans abréger la division, $x'' = \frac{398828,51}{306867,29968} = 1,2996774515$. . . . . , $x' =$ 0,34342996774515. . . , $x = 1,534342996774515$. . . Après avoir rendu à x sa valeur primitive, on obtient pour la racine cherchée 1534342,996774515.

Extraire la racine cubique de 45873642.

Pour faire cette opération, on résoudra l'équation . . .

. . . .		x^3	$0x^2$	$0x$	$-45,873642 = 0$.
Suites en	$x-1$	. 6	$+6$	$+1$	-44,
	$x-2$	. 6	$+12$	$+7$	-37,
	$x-3$	. 6	$+18$	$+19$	-18,
				$+37$	
Transf. en	$x-3$	. x^3	$+9x^2$	$+27x$	$-18,873$,
en	$10x-30$	. x'^3	$+90x'^2$	$+2700x'$	-18873,
Suites en	$10x-31$	. 6	$+186$	$+2791$	-16082,
	id. -32	. 6	$+192$	$+2977$	-13105,
	id. -33	. 6	$+198$	$+3169$	-9936,
	id. -34	. 6	$+204$	$+3367$	-6569,
	id. -35	. 6	$+210$	$+3571$	-2998,
				$+3781$	
Transf. en	$10x-35$	. x'^3	$+105x'^2$	$+3675x'$	$-2998,642 = 0$.

On en déduit $3675x' = 2998{,}642$, $x' = \frac{2998{,}642}{3675} = 0{,}8159$. Après avoir substitué cette valeur pour x' dans le terme $105x'^2$, on a $0{,}8159 \times 105x' + 3675x' = 2998{,}642$, d'où $86x' + 3675x' = 2998{,}642$, et $x' = \frac{2998{,}642}{3761} = 0{,}7973\ldots$ La racine cherchée est $357{,}97\ldots$ Veut-on vérifier la valeur de $x' = 0{,}7973\ldots$ et se procurer beaucoup de décimales exactes? on formera, en se bornant aux 4 premières décimales pour x', la transformée $100000x - 357973 = x''$.

Extraire la racine 4e de 20324876346423.

Lorsque dans $x^m - q = 0$, on fait $x = x' + a$, et $m = 4$, on obtient l'équation $x'^4 + 4ax'^3 + 6a^2x'^2 + 4a^3x' + a^4 - q = 0$, qui représente une transformée quelconque de $x^4 - q = 0$.

Le nombre proposé comprend 4 tranches dont la 1re à gauche se compose de deux chiffres; on a donc à résoudre l'équation $x^4 - 20{,}32487634642 3 = 0$.

		x^4	$0x^3$	$+\,0x^2$	$+\,0x$	$-20{,}3248\ldots = 0.$
Suit. en	$x-1$	. 24	$+36$	$+14$	$+1$	$-19,$
	$x-2$	. 24	$+60$	$+50$	$+15$	$-4,$
					$+65$	
Tr. en	$x-2$	. $x^4 +$	$8x^3$	$+24x^2$	$+32x$	$-4{,}3248,$
	$10x-20$	. $x'^4 +$	$80x'^3$	$+2400x'^2$	$+32000x'$	$-43248,$
			492	$+4802$		
Suit. en	$10x-21$	. 24	$+516$	$+5294$	$+34481$	$-8767,$
					$+39775$	
Tr. en	$10x-21$	. $x'^4 +$	$84x'^3$	$+2646x'^2$	$+37044x'$	$-8767{,}7634 = 0.$

On déduit de cette dernière $x' = \frac{8767{,}763\ldots}{37044} = 0{,}2366$; puis $0{,}2366 \times 2646x' + 37044x' = 8767{,}763\ldots$, d'où $x' = \frac{8767{,}7634\ldots}{37670} = 0{,}232\ldots$; on se bornera à la 3e décimale pour la valeur de x', attendu qu'on a négligé le terme $84x'^3$. La racine cherchée est donc 2123,2. Si l'on a besoin de vérifier cette valeur et de se procurer beaucoup de décimales exactes, on atteindra ce double but au moyen de la transformés en $10000x - 21232 = x''$.

Les principes émis pour l'extraction des racines quarrée, cubique et quatrième s'appliquent à tous les degrés.

LVIII. Il est à observer que l'extraction de la racine quatrième peut s'effectuer au moyen de deux extractions successives de la racine quarrée ; car, en prenant d'abord la racine quarrée d'une quatrième puissance, de a^4, par exemple, on tombe sur le quarré ou a^2, résultat dont la racine quarrée est a, ou la quantité cherchée.

On verra de même que trois extractions successives de la racine quarrée équivalent à l'extraction de la racine 8ᵉ, puisque la racine quarrée de a^8 est a^4, que celle de a^4 est a^2, et qu'enfin celle de a^2 est a.

Il est évident de cette manière, que toute racine d'un degré marqué par quelqu'un des nombres 2,4,8,16,32, etc., c'est à dire par une puissance de 2, s'obtiendra par une suite d'extractions de la racine quarrée.

Les racines dont les exposans ne sont pas des nombres premiers, peuvent se ramener à d'autres d'un degré moins élevé ; la racine sixième, par exemple, s'obtiendra par une extraction de la racine quarrée suivie d'une extraction de la racine cubique. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'en opérant ainsi sur a^6, on trouve d'abord a^3, puis a ; on pourrait aussi prendre d'abord la racine cubique, ce qui donnerait a^2, puis la racine quarrée, et on aurait a.

LIX. On peut placer l'un au dessous de l'autre, sur une même ligne verticale, les termes de chaque suite et de chaque transformée. Cette disposition rend le calcul plus expéditif et beaucoup plus facile, lorsque les nombres à ajouter ou à soustraire sont considérables.

Si l'on ne s'est pas servi du procédé d'abréviation indiqué n° 47, et dont chacun peut faire usage, c'est parce qu'on a eu en vue de rendre plus facile l'intelligence de ce traité.

LX. La méthode des suites, qu'on peut aussi appeler *Méthode des différences, Méthode d'interpolation*, est le passage naturel des mathématiques élémentaires aux mathématiques

transcendantes. On peut se servir du calcul des différences pour résoudre, même par approximation, une équation d'un degré quelconque; car il est facile de se procurer, au moyen de ce calcul et de la formule du binome de Newton[1], tel terme de telle suite qu'on voudra. Pour cela, on fait, dans l'équation proposée, $x = \frac{x'}{10}$, $x = \frac{x''}{100}$, $x = \frac{x'''}{1000}$, etc., et on forme les suites premières : les transformées en $10(x-p)$, en $10(x'-p')$, en $10(x''-p'')$ etc., sont alors inutiles, et le calcul un peu long.

Lorsqu'on est parvenu, en employant les suites et les transformées, à resoudre une équation quelconque, on a recours avec avantage au calcul des différences, entr'autres moyens de vérification, pour s'assurer de l'exactitude des résultats.

Soit, pour exemple,	x^3	0	$-\ 90x$	$-\ 98$	$= 0.$
Suites en	$x-1$ . .	$6+$	$6-$	$89-$	187
	$x-2$ . .	$6+$	$12-$	$83-$	270
	$x-3$ . .	$6+$	$18-$	$71-$	341
	$x-4$ . .	$6+$	$24-$	$53-$	394
	$x-5$ . .	$6+$	$30-$	$29-$	423
	$x-6$ . .	$6+$	$36+$	$1-$	422
	$x-7$ . .	$6+$	$42+$	$37-$	385
	$x-8$ . .	$6+$	$48+$	$79-$	306
	$x-9$ . .	$6+$	$54+$	$127-$	179
	$x-10$. .	$6+$	$60+$	$181+$	2

Lorsqu'on désigne par K le dernier terme de la suite en $x-p$, on a, dans cet exemple, $K = -98 - \frac{p}{1}89 + \frac{p(p-1)}{1\ .\ 2}6 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}6$. Dans la supposition de $p = 10$, on trouve $K = 2$; ce qui prouve qu'il n'y a pas d'erreur dans la valeur de tous les termes, excepté ceux de la suite

[1] Pour atteindre le même but, on peut encore employer la sommation des suites.

première, qui ont concouru à la formation du dernier terme de la suite en $x-10$. Si on suppose $p=7$, on a $K=-385$, etc.

LXI. On pourrait se servir de la formule du binome pour passer, quel que soit le degré de l'équation, de la suite en $x-p-1$ à la transformée en $x-p$. En effet, lorsqu'on désigne par u le dernier terme de la suite en $x-p$ et par $a+b+\dots n+q+r+s+t$, tous les termes de la suite en $x-p-1$, la transformée en $x-p$ est $u+\frac{x}{1}s+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}r+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}q+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}n+\dots$ etc. Le coefficient du terme où x est à la 1re puissance, se compose de $1\,.\,s-\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot q-\frac{1}{4}\cdot n+$, etc.

Exemple. . .	x^4	$0x^3$ —	$20x^2$ +	$12x$ +	$13=0$.
		+ 12	— 38		
Suites en $x-1$ . .	24	+ 36	— 26	— 7	+ 6
$x-2$ . .	24	+ 60	+ 10	— 33	— 27
$x-3$ . .	24	+ 84	+ 70	— 23	— 50
$x-4$ . .	24	+ 108	+ 154	+ 47	— 3.

La transformée en $x-3$, par exemple, est $0=-50+\frac{x}{1}47+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}154+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}108+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}24$. Après l'exécution du calcul, on a $0=-50\pm0x+34x^2+12x^3+x^4$.

Les procédés arithmétiques que nous avons fait connaître, sont plus faciles et plus expéditifs que cette formule. Comme le coefficient du terme où x se trouve à la 1re puissance, est égal à zéro, on doit avoir $0=47-\frac{1}{2}\,.\,154+\frac{1}{3}\,.\,108-\frac{1}{4}\,.\,24$. Cette manière de se procurer le coefficient de x peut être de quelque utilité, quand on veut adapter à la méthode des suites le procédé d'approximation de Newton [1]. Ce n'est plus de l'approximation que nous devrions parler, mais bien de l'interpolation, etc., etc.

[1] On peut encore s'en servir pour s'assurer s'il y a deux racines égales.

LXII. Voici un tableau plus facile que celui du nº 49, soit pour former les suites, soit pour se procurer les transformées. Lorsqu'on en fait usage, on obtient la suite en $x \mp 0$ de laquelle on passe à celle en $x \mp 1$, dont les deux derniers termes sont connus par l'addition des coefficiens de la proposée.

DEGRÉS.	8e	7e	6e	5e	4e	3e	2e	»
8e H	(ax^8) $1a$	$20a$	$126a$	$294a$	$231a$	$42a$	$1a$	H′
7e	. G	(bx^7) $1b$	$14b$	$56b$	$70b$	$21b$	0	G′
6e	.	. F	(cx^6) $1c$	$9c$	$20c$	$10c$	$1c$	F′
5e	.	.	. E	(dx^5) $1d$	$5d$	$5d$	0	E′
4e	.	.	.	. D	(ex^4) $1e$	$2e$	$1e$	D′
3e	.	.	.	.	. C	(fx^3) $1f$	0	C′
2e	.	.	.	.	.	. B	(gx^2) $1g$	B′
								A
Multiplicateurs pour la formation de ce tableau.	7	6	5	4	3	2	1	0
Multiplicateurs pour la formation des suites.	40320	5040	720	120	24	6	2	1

Formation et usages de ce tableau.

Pour former ce tableau, on procède de droite à gauche, de bas en haut. Si, par exemple, on multiplie par 5 le coefficient de c, qui est 1, à la colonne verticale du sixième degré, et qu'on ajoute au produit le coefficient de c, à la colonne verticale du 5e degré, on aura 14 pour coefficient de b à la colonne verticale du 6e degré.

On se sert de ce tableau de la manière indiquée n° 49; on emploie, en outre, les multiplicateurs pour la formation des suites. Le 3e terme, par exemple, de la suite en $x \mp 0$ d'une équation du 7e degré est $(56\,b + 9\,c + d)\,120$; le 4e terme de la suite en $x \mp 0$ d'une équation du 5e degré est $(e + g)\,2$.

Pour passer, au moyen de ce tableau, d'une suite en $x - p$ à la transformée en $x - p$, on opérera comme il est prescrit n° 9.

On voit combien la route que nous nous sommes frayée diffère de celles des auteurs. Nous l'indiquons au commençans, parce qu'elle est sûre, courte et facile. Les savans, habitués à lutter contre toutes les difficultés, daigneront-ils y mettre le pied?

FIN.

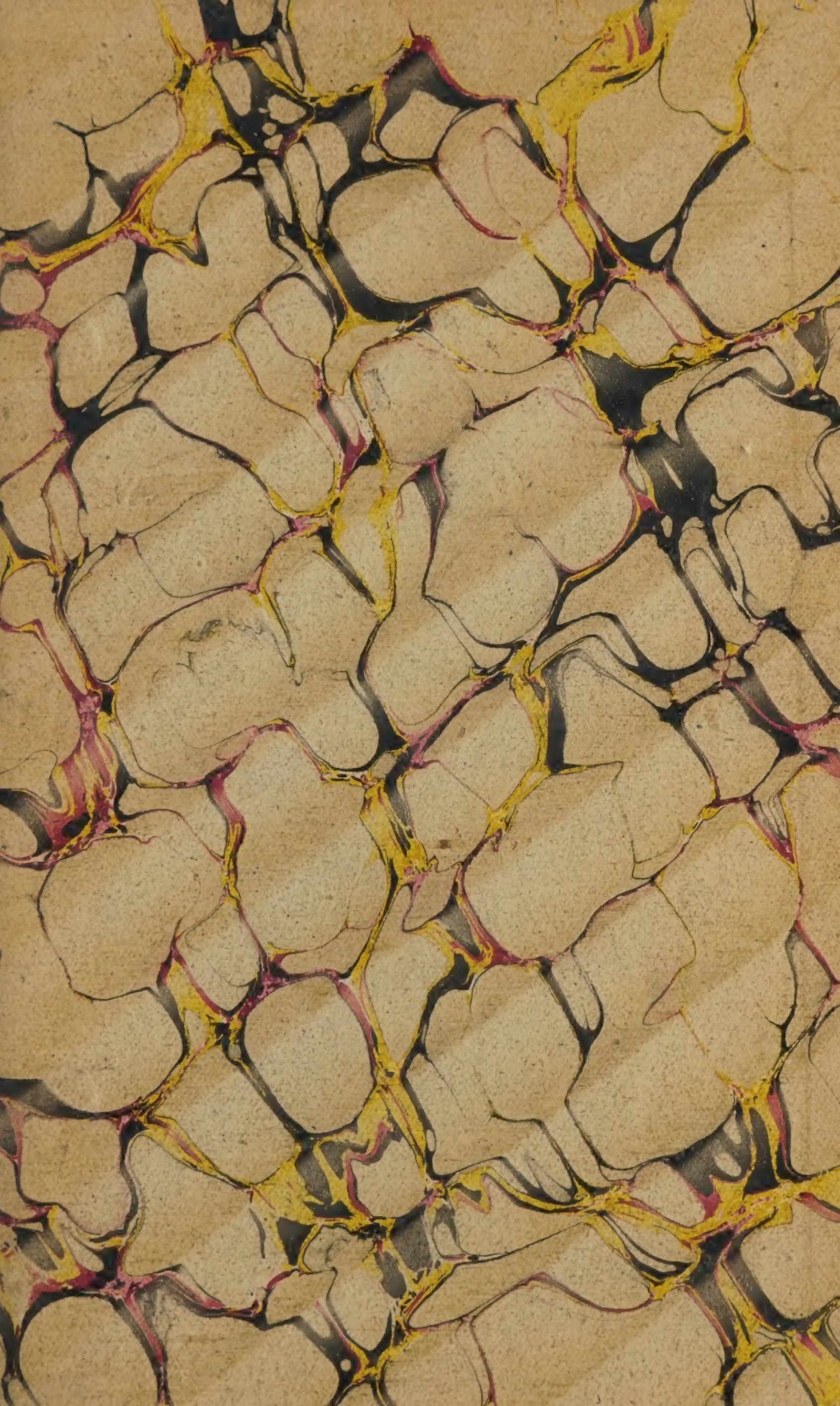
ERRATA.

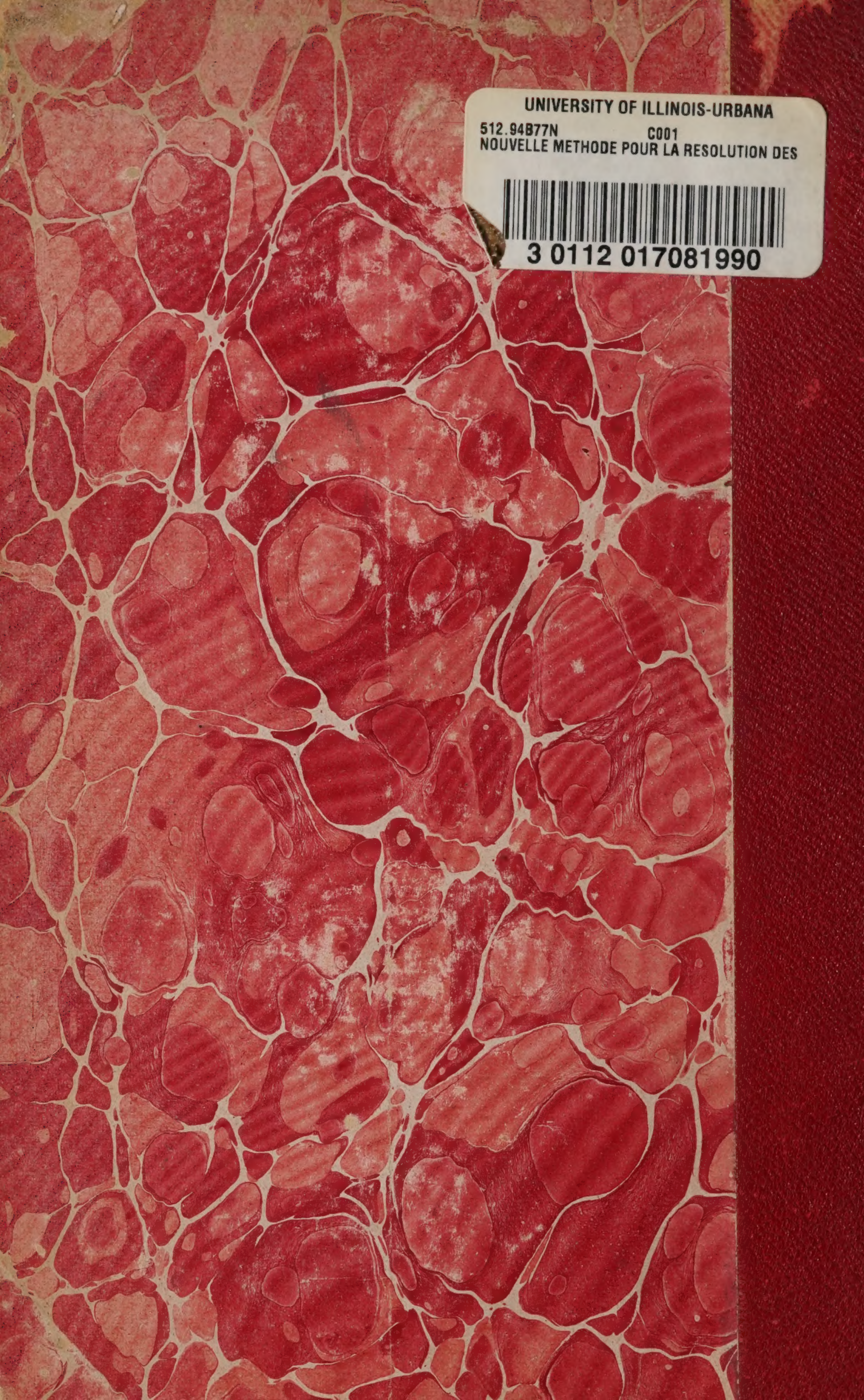
Page 24 ligne 33, *au lieu de* $21x$, *lisez* $21x^2$.
Page 41 ligne 26, *au lieu de* $1000x$, *lisez* $10000x$.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.94B77N C001
NOUVELLE METHODE POUR LA RESOLUTION DES
3 0112 017081990